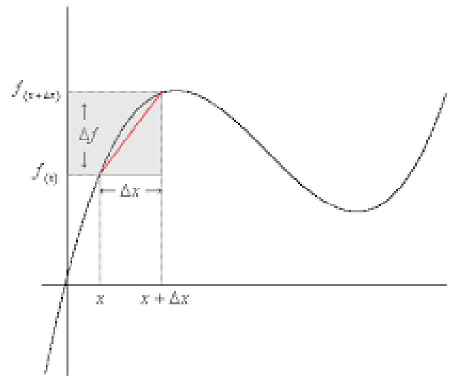
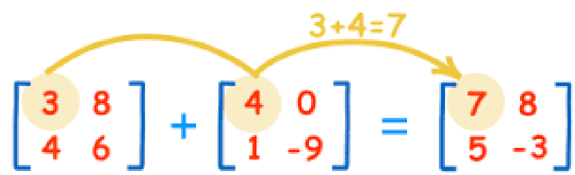
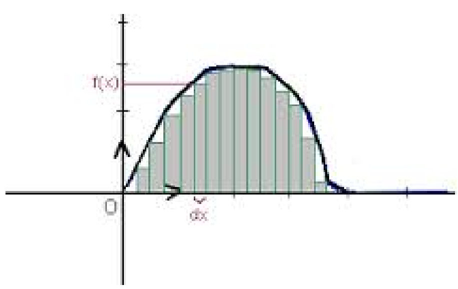
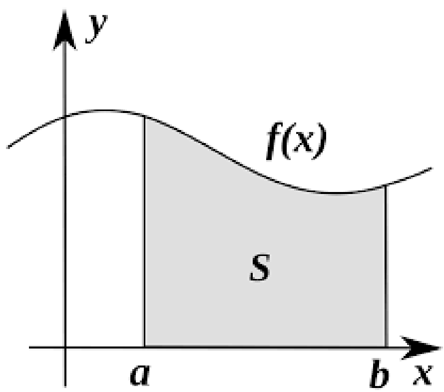








كتاب علاجي لمقرر الرياضيات

2015

المحتويات

الوحدة الأولى

المصفوفات والمحددات

$$\begin{bmatrix} ١ & ٢- & ٣ \\ ١- & ٣ & ١- \\ ٢ & ٥- & ٥ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ \\ ٦- \\ ١٧ \end{bmatrix}$$

١-١ مفهوم المصفوفة:

نلجأ في كثير من الأحيان، في حياتنا اليومية وفي دراساتنا العلمية، إلى تبويب البيانات وعرضها على هيئة جداول مستطيلة الشكل مكونة من عدد من الصفوف والاعمدة، فمثلاً كان توزيع الطلبة في إحدى الجامعا الفلسطينية في العام الدراسي ٢٠٠٤ / ٢٠٠٥م - الفصل الأول في بعض الكليا كما هو في الجدول التالي:

الكلية / السنة	الأولى	الثانية	الثالثة	الرابعة
الآداب	٨٠٢	٤٨١	٣٧٢	٣٠١
العلوم	٥٧٨	١٧٦	١٢٦	١٥١
الهندسة	٤٨٤	٣١٤	٢٦١	٣٠٠

يمكن عرض هذه البيانات بصورة مختصرة كما يلي:

$$\begin{bmatrix} ٨٠٢ & ٤٨١ & ٣٧٢ & ٣٠١ \\ ٥٧٨ & ١٧٦ & ١٢٦ & ١٥١ \\ ٤٨٤ & ٣١٤ & ٢٦١ & ٣٠٠ \end{bmatrix}$$

يسمى هذا التنظيم مصفوفة، ويسمى كل عدد من الأعداد فيه مدخلة، وبما أن هذه المصفوفة مكونة من ثلاثة صفوف وأربعة أعمدة، فإنه يقال إنها مصفوفة من الرتبة (البعد) ٣ × ٤ وتقرأ ٣ في ٤ .

تعـريف:

المصفوفة: هي تنظيم مستطيل الشكل لمجموعة من الأعداد على هيئة صفوف وأعمدة محصورة بين قوسين والمصفوفة المكونه من م من الصفوف، ن من الأعمدة حيث م ، ن عددان صحيحان موجبان، يقال لها مصفوفة من الرتبة م × ن . ويمكن تسميتها بأحد الأحرف مثل أ ، ب ، . . . .

والصورة العامة للمصفوفة من الرتبة م x ن هي كما يلي:

$$\begin{bmatrix} \text{أ}_{\text{ن١}} \cdots & \text{أ}_{\text{٣١}} & \text{أ}_{\text{٢١}} & \text{أ}_{\text{١١}} \\ \text{أ}_{\text{ن٢}} \cdots & \text{أ}_{\text{٣٢}} & \text{أ}_{\text{٢٢}} & \text{أ}_{\text{١٢}} \\ \text{أ}_{\text{ن٣}} \cdots & \text{أ}_{\text{٣٣}} & \text{أ}_{\text{٢٣}} & \text{أ}_{\text{١٣}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{أ}_{\text{نم}} \cdots & \text{أ}_{\text{٣م}} & \text{أ}_{\text{٢م}} & \text{أ}_{\text{١م}} \end{bmatrix} = \text{أ}$$

لاحظ أن مدخلات الصف الأول هي : $\text{أ}_{\text{١١}}$ ، $\text{أ}_{\text{٢١}}$ ، $\text{أ}_{\text{٣١}}$ ، ... ، $\text{أ}_{\text{ن١}}$ وعددها ن (عدد الأعمدة).

وتُقرأ : أ واحد واحد ، أ واحد إثنان، ... ، أ واحد نون .

ومدخلات العمود الأول هي : $\text{أ}_{\text{١١}}$ ، $\text{أ}_{\text{١٢}}$ ، $\text{أ}_{\text{١٣}}$ ، ... ، $\text{أ}_{\text{١م}}$ وعددها م (عدد الصفوف).

المدخلة $\text{أ}_{\text{٣٢}}$ مثلاً هي المدخلة الواقعة في الصف الثاني والعمود الثالث .

وبوجه عام فإن : $\text{أ}_{\text{ي هـ}}$ هي مدخلة الصف ي والعمود هـ .

مثال (١): إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & -٣ & ٥ \\ ٢ & ٤ & ٠ \end{bmatrix}$ فما هي رتبة أ ؟ اكتب المدخلتين : $\text{أ}_{\text{٣١}}$ ، $\text{أ}_{\text{٢٢}}$.

الحل: رتبة أ = عدد الصفوف x عدد الأعمدة = ٢ x ٣ .

$\text{أ}_{\text{٣١}}$ هي مدخلة الصف الأول والعمود الثالث = ١ .

$\text{أ}_{\text{٢٢}}$ هي مدخلة الصف الثاني والعمود الثاني = ٤ .

مثال (٢): إذا كان النظام : ٢ س − ٣ ص = ٣

٥ س + ص = ١١

أكتب مصفوفة المعاملات للمتغيرين س ، ص في النظام، واكتب مصفوفة الثوابت فيه .

الحل: مصفوفة المعاملات هي : $\begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}$

مصفوفة الثوابت هي : $\begin{bmatrix} ٣ \\ ١١ \end{bmatrix}$

مثال (٣): أكتب المصفوفة $أ$ من الرتبة ٢ x ٣ بحيث $أ_{يه} = \begin{cases} ٢ & ، ي < ه \\ ١ & ، ي = ه \\ -١ & ، ي > ه \end{cases}$

الحل:

$$أ = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & -١ & -١ \\ ٢ & ١ & -١ \end{bmatrix}$$

مصفوفات خاصة:

هناك بعض المصفوفات التي لها دور خاص في دراسة المصفوفات ومنها :

١) **المصفوفة المربعة**: هي المصفوفة التي يتساوى فيها عدد الصفوف مع عدد الأعمدة. في هذه الحالة تسمى المصفوفة مصفوفة مربعة من الرتبة م حيث م عدد الصفوف أو عدد الأعمدة.

فمثلاً المصفوفة $ل = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$ هي مصفوفة مربعة من الرتبة ٢ .

٢) **مصفوفة الصف**: وهي المصفوفة المكونة من صف واحد .

فمثلاً المصفوفة $ص = \begin{bmatrix} ١ & -٢ & ٣ \end{bmatrix}$ هي مصفوفة صف من الرتبة ١ x ٣ .

٣) **مصفوفة العمود**: وهي المصفوفة المكونة من عمود واحد .

فمثلاً المصفوفة $ع = \begin{bmatrix} -٤ \\ ٣ \\ ٦ \\ ٨ \end{bmatrix}$ هي مصفوفة عمود من الرتبة ٤ x ١ .

٤) **مصفوفة صفرية**: هي مصفوفة تكون جميع مدخلاتها أصفاراً ويرمز لها عادة بالرمز و .

فمثلاً المصفوفة $و = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ هي مصفوفة صفرية من الرتبة ٢ x ٣ .

٥) **مصفوفة وحدة**: هي مصفوفة مربعة بحيث $أ_{يه} = \begin{cases} ١ & \text{عندما } ي = ه \\ ٠ & \text{عندما } ي \neq ه \end{cases}$

ويرمز لها عادة بالرمز م ، فمثلاً المصفوفة $م_{٢} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ هي مصفوفة وحدة من الرتبة الثانية .

تساوي مصفوفتين:

تعـريف:

تتساوى المصفوفتان أ ، ب إذا كان لهما الرتبة نفسها م×ن ، وكانت مدخلاتهما المتناظرة متساوية .

وبالرموز : أ = ب إذا كانت $أ_{يهـ} = ب_{يهـ}$ ، ي = ١ ، ٢ ، . . . . ، م ، هـ = ١ ، ٢ ، . . . . ، ن .

مثال (١):

إذا كانت : $\begin{bmatrix} أ & ب & جـ \\ س & ٠ & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ & ١ \\ -٣ & ٠ & ٧ \end{bmatrix}$

فإن : أ = ٢ ، ب = ٥ ، جـ = ١ ، س = −٣ .

مثال (٢):

إذا كانت : $\begin{bmatrix} س^٢ & ٢ \\ س^٢ - س & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & ٢ \\ ٦ & ١ \end{bmatrix}$ ، فأوجد قيمة س .

الحل: بما أن المصفوفتين متساويتان فإن المدخلات المتناظرة متساوية .

$س^٢ = ٩ \Leftarrow س = ٣ ، -٣$

$س^٢ - س = ٦ \Leftarrow س^٢ - س - ٦ = ٠ \Leftarrow (س - ٣)(س + ٢) = ٠$

$\Leftarrow س = ٣ ، س = -٢$

قيمة س التي تحقق المعادلتين معاً هي ٣ ، $\Leftarrow$ س = ٣ .

تمارين ١ – ١ :

1. أكتب مصفوفة المعاملات ومصفوفة الثوابت للنظام :

$س - ٢ص + ٣ع = ٩$

$٢س - ٥ص + ٥ع = ١٧$

$-س + ٣ص = -٤$

2 . إذا كانت : $\begin{bmatrix} \text{س} - ١ & \text{ص} + ٣ \\ ٢\text{س} + ١ & ١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ ٢\text{ع} - ١ & ٣\text{ل} + ١ \end{bmatrix}$ ، فجد قيمة كلٍ من : س ، ص، ع ، ل .

3 . إذا كانت : $\begin{bmatrix} \text{س}^{٢} - ٣ & ١ \\ -٦ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ١ \\ \text{س}^{٢} - ٥\text{س} & ٢ \end{bmatrix}$ ، فجد قيمة/ قيم س .

٢- العمليات على المصفوفات

أولاً: عملية الجمع:

تعـريف:

اذا كانت أ ، ب مصفوفتين من الرتبة م x ن فإن مجموع المصفوفتين ويرمز له بالرمز أ + ب هو مصفوفة جـ من الرتبة م x ن وبحيث $جـ_{ي هـ} = أ_{ي هـ} + ب_{ي هـ}$ لجميع قيم ي ، هـ الممكنة .

أي أنه عند جمع مصفوفتين لهما الرتبة نفسها، فإننا نقوم بجمع المدخلات المتناظرة فيهما .

مثال (١):

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ١- & ١ \\ ٥- & ٣ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $ك = \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٠ & ٦ \\ ٩ & ٧ \end{bmatrix}$

جد ان امكن قيمة : ١) أ + ب ٢) ب + أ ٣) أ + ك

الحل:

١) $أ + ب = \begin{bmatrix} ٣ + ٢ & ٢ + (-١) & ١ + ١ \\ ٦ + (-٥) & ٥ + ٣ & ٤ + ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ١ & ٢ \\ ١ & ٨ & ٤ \end{bmatrix}$

٢) $ب + أ = \begin{bmatrix} ٥ & ١ & ٢ \\ ١ & ٨ & ٤ \end{bmatrix}$ نلاحظ أن أ + ب = ب + أ

٣) أ + ك : غير معرفة لاختلاف رتبتي أ ، ك .

مثال (٢): عند أحمد مصنعان للأحذية أحدهما في الخليل والآخر في رام الله وينتج كل منهما ثلاثة أنواع من الأحذية : «ولادي» ، «رجالي» ، «ستاتي» وكل نوع بلونين : اللون الأسود واللون البني .

فإذا كان إنتاج المصنعين في الأسبوع الأول من شهر آذار سنة ٢٠٠٣ كما في الجدولين التاليين :

	أسود	بني
ولادي	٨٠	٩٠
رجالي	٦٠	٤٠
ستاتي	٣٠	٣٠

مصنع الخليل

	أسود	بني
ولادي	٥٥	٦٥
رجالي	٤٥	٣٠
ستاتي	٥٠	٤٥

مصنع رام الله

أكتب المصفوفة التي تمثل مجموع ما ينتجه المصنعان من الأحذية بأصنافها المختلفة .

الحل: إذا استخدمنا الرمز م لمصفوفة إنتاج مصنع الخليل والرمز ن لمصفوفة إنتاج مصنع رام الله فإن مصفوفة ما ينتجه المصنعان معاً هي :

$$م + ن = \begin{bmatrix} ٨٠ & ٩٠ \\ ٦٠ & ٤٠ \\ ٣٠ & ٣٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥٥ & ٦٥ \\ ٤٥ & ٣٠ \\ ٥٠ & ٤٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٣٥ & ١٥٥ \\ ١٠٥ & ٧٠ \\ ٨٠ & ٧٥ \end{bmatrix}$$

ثانياً: عملية ضرب مصفوفة بعدد حقيقي:

تعـريف:

إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة م × ن وكان ك عدداً حقيقياً فإن ك أ مصفوفة جـ من الرتبة م×ن بحيث :

$جـ_{ي هـ} = ك\ أ_{ي هـ}$ لجميع قيم ي ، هـ الممكنة .

أي أنه عند ضرب مصفوفة بعدد حقيقي ، فإننا نقوم بضرب كل مدخلة في المصفوفة بالعدد نفسه .

مثال (٣): إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٥- \end{bmatrix}$ فإن : $٢أ = \begin{bmatrix} ٢×١ & ٢×٣ \\ ٢×٢ & ٢×٥- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ ٤ & ١٠- \end{bmatrix}$

$\frac{١}{٢} أ = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{٣}{٢} \\ ١ & \frac{٥-}{٢} \end{bmatrix}$ ، $(١-) أ = \begin{bmatrix} ١- & ٣- \\ ٢- & ٥ \end{bmatrix} = -أ$

لاحظ أن : $أ + (-أ) = و_{م}$ (المصفوفة الصفرية) . تسمى المصفوفة (-أ) النظير الجمعي للمصفوفة أ .

ثالثاً: عملية الطرح:

تعـريف:

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين من الرتبة نفسها فإن : أ - ب = أ + (-ب) .

مثال (٤): إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١ & ٣- \\ ٢- & ٠ \end{bmatrix}$ ، جد قيمة : أ - ب .

الحل: $أ - ب = أ + (-ب) = \begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٣ & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١- & ٣ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$

لاحظ أن مدخلات المصفوفة أ - ب تنتج من طرح مدخلات المصفوفة ب من المدخلات المناظرة لها في المصفوفة أ .

خصائص جمع المصفوفات وضرب المصفوفات بعدد حقيقي:

إذا كانت أ ، ب ، جـ مصفوفات من الرتبة م×ن وكانت ك ∈ ح فإن:

١. أ + ب = ب + أ (التبديل)

٢. (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ) (التجميع)

٣. أ + و = و + أ = أ (العنصر المحايد)

٤. أ + −أ = و (النظير الجمعي)

٥. ك (أ + ب) = ك أ + ك ب

٦. (أ + ب) ك = أ ك + ب ك

تدريب

تحقق من صحة هذه الخصائص، ثم بين أن النظام (ف ، +) زمرة تبديلية حيث ف مجموعة جميع المصفوفات من الرتبة م×ن .

مثال(٥):

حل المعادلة المصفوفية: $\text{س} + \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = ٢\text{س} + ٣ \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$

الحل:

$$\text{س} + \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = ٢\text{س} + ٣ \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$$

بإضافة (−س) إلى طرفي المعادلة واستخدام خاصية التجميع والعنصر المحايد ينتج:

$$\begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \text{س} + \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & ٦ \end{bmatrix}$$

بإضافة $\begin{bmatrix} -٣ & ٠ \\ ٠ & -٦ \end{bmatrix}$ إلى طرفي المعادلة واستخدام خاصية التجميع والنظير الجمعي ينتج:

$$\text{س} = \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٣ & ٠ \\ ٠ & -٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ & -١ \\ ١ & -٦ \end{bmatrix} .$$

تحقق من صحة الإجابة .

تدريبات

١ . إذا كانت :

$$أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix} ، ب = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ -٤ & ٠ \end{bmatrix} ، جـ = \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix}$$

فجد كلاً مما يلي :

١ . ٢ أ + ب + جـ   ٢ . (أ + ب) − (ب + جـ) .

٢ . تحقق من صحة المتطابقة :

$$\begin{bmatrix} ب & أ \\ د & جـ \end{bmatrix} = أ \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} + ب \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} + جـ \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} + د \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$$

ثم اكتب المصفوفة $\begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ كمجموع ٤ مصفوفات بالطريقة ذاتها .

٣ . حل المعادلة المصفوفية :

$$-٣ \left(س + \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix} \right) = ٢س + \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

رابعاً: ضرب المصفوفات:

تعـريف:

إذا كانت **أ** مصفوفة من الرتبة م x ن ، **ب** مصفوفة من الرتبة ن x ل فإن حاصل الضرب **أ ب** هو مصفوفة **جـ** من الرتبة م x ل بحيث $\text{جـ}_{\text{ي هـ}} = \text{أ}_{\text{ي ١}}\,\text{ب}_{\text{١ هـ}} + \text{أ}_{\text{ي ٢}}\,\text{ب}_{\text{٢ هـ}} + \text{أ}_{\text{ي ٣}}\,\text{ب}_{\text{٣ هـ}} + \ldots + \text{أ}_{\text{ي ن}}\,\text{ب}_{\text{ن هـ}}$.

أي أن المدخلة $\text{جـ}_{\text{ي هـ}}$ = مجموع حواصل ضرب المدخلا المتناظرة في الصف ي من المصفوفة الأولى والعمود هـ من المصفوفة الثانية . لاحظ الشكل :

$$
\underset{\text{م} \times \text{ل}}{\begin{bmatrix} \text{جـ}_{\text{١ل}} & \cdots & \text{جـ}_{\text{١هـ}} & \cdots & \text{جـ}_{\text{٢١}} & \text{جـ}_{\text{١١}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \text{جـ}_{\text{ي ل}} & \cdots & \text{جـ}_{\text{ي هـ}} & \cdots & \text{جـ}_{\text{ي٢}} & \text{جـ}_{\text{ي١}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \text{جـ}_{\text{م ل}} & \cdots & \text{جـ}_{\text{م هـ}} & \cdots & \text{جـ}_{\text{م٢}} & \text{جـ}_{\text{م١}} \end{bmatrix}}
=
\underset{\text{ن} \times \text{ل}}{\begin{bmatrix} \text{ب}_{\text{١ل}} & \cdots & \text{ب}_{\text{١هـ}} & \cdots & \text{ب}_{\text{٢١}} & \text{ب}_{\text{١١}} \\ \text{ب}_{\text{٢ل}} & \cdots & \text{ب}_{\text{٢هـ}} & \cdots & \text{ب}_{\text{٢٢}} & \text{ب}_{\text{١٢}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \text{ب}_{\text{ن ل}} & \cdots & \text{ب}_{\text{ن هـ}} & \cdots & \text{ب}_{\text{ن٢}} & \text{ب}_{\text{ن١}} \end{bmatrix}}
\underset{\text{م} \times \text{ن}}{\begin{bmatrix} \text{أ}_{\text{ن١}} & \cdots & \text{أ}_{\text{٣١}} & \text{أ}_{\text{٢١}} & \text{أ}_{\text{١١}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{أ}_{\text{ي ن}} & \cdots & \text{أ}_{\text{ي٣}} & \text{أ}_{\text{ي٢}} & \text{أ}_{\text{ي١}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{أ}_{\text{م ن}} & \cdots & \text{أ}_{\text{م٣}} & \text{أ}_{\text{م٢}} & \text{أ}_{\text{م١}} \end{bmatrix}}
$$

مثال (٦):

إذا كانت **أ** = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ، **ب** = $\begin{bmatrix} ١ & ٢- & ٠ \\ ٥ & ٣ & ٣- \end{bmatrix}$

أوجد (إن امكن) كلاً من : **أ ب** ، **ب أ** .

الحل:

أ من الرتبة ٢ x ٢ ، **ب** من الرتبة ٢ x ٣ إذن حاصل الضرب **أ ب** معرف لأن عدد أعمدة **أ** = عدد صفوف **ب**.

$$
\text{أ ب} = \underset{٢ \times ٢}{\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}} \underset{٣ \times ٢}{\begin{bmatrix} ١ & ٢- & ٠ \\ ٥ & ٣ & ٣- \end{bmatrix}}
$$

$$
= \begin{bmatrix} ٥\times٢ + ١\times١ & ٣\times٢ + ٢-\times١ & ٣-\times٢ + ٠\times١ \\ ٥\times٤ + ١\times٣ & ٣\times٤ + ٢-\times٣ & ٣-\times٤ + ٠\times٣ \end{bmatrix}
$$

$$
= \underset{٣ \times ٢}{\begin{bmatrix} ١١ & ٤ & ٦- \\ ٢٣ & ٦ & ١٢- \end{bmatrix}} .
$$

ب أ : حاصل الضرب **ب أ** غير معرف لأن عدد أعمدة **ب** لا يساوي عدد صفوف **أ** .

مثال (٧):

إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

فأوجد (إن امكن) كلاً من : أ ب ، ب أ . ماذا تستنتج؟

الحل: أ من الرتبة ٣ x ٢ ، ب من الرتبة ٢ x ٣ إذن حاصل الضرب أ ب معرف، وكذلك حاصل الضرب ب أ معرف .

$$\text{أ ب} = \underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}} \underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}} = \underset{3\times 3}{\begin{bmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{bmatrix}}$$

$$\text{ب أ} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -21 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن أ ب ≠ ب أ أي أن عملية ضرب المصفوفات غير تبديلية .

مثال (٨) لديك النظام الآتي من المعادلات الخطية في المتغيرات (المجاهيل) س ، ص ، ع :

س − ٢ ص + ٣ع = ٩

−س + ٣ ص − ع = −٦

٢ س − ٥ ص + ٥ع = ١٧

مثِّل هذا النظام بمعادلة مصفوفية .

الحل: يمكن تمثيل النظام بالمعادلة الآتية :

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -6 \\ 17 \end{bmatrix}$$

مصفوفة المعاملات   مصفوفة المتغيرات   مصفوفة الثوابت

خصائص عملية ضرب المصفوفات:

إذا كانت أ ، ب ، جـ مصفوفات بحيث ان عملية الضرب والجمع في العبارات التالية معرفة ، وكانت ك ∈ ح فإن :

١ . (أ ب) جـ = أ (ب جـ) (التجميع)

٢ . أ (ب + جـ) = أ ب + أ جـ (التوزيع من اليمين)

٣ . (أ + ب) جـ = أ جـ + ب جـ (التوزيع من اليسار)

٤ . أ م = م أ = أ (م المصفوفة المحايدة)

٥ . ك (أ ب) = (ك أ) ب = أ (ك ب)

مثال (٩) : اذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٤ & -٦ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix}$ فأوجد أ ب . ماذا تستنتج؟

الحل:

أ ب = $\begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٤ & -٦ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ = و$_{٢}$

نستنتج أنه يمكن أن يكون حاصل ضرب مصفوفتين غير صفريتين هو المصفوفة الصفرية .

مثال (١٠) : إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٦ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -١ & ٥ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ -٢ & -١ \end{bmatrix}$

فأوجد أ ب ، أ جـ . ماذا تستنتج؟

الحل:

أ ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٦ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -١ & ٥ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٨ & ٢ \end{bmatrix}$

أ جـ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٦ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ -٢ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٨ & ٢ \end{bmatrix}$

نستنتج أن أ ب = أ جـ ، ب ≠ جـ أي أن خاصية الاختزال غير متحققة في عملية ضرب المصفوفات .

تمارين ١–٢ :

١ . جد (إن أمكن) قيمة كل مما يلي :

أ) $\begin{bmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -9 & 2\\ 5 & 7 & -6\end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}$

٢. إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{bmatrix}$ ، $\text{جـ} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$

بيِّن أن : $(\text{أ ب})\,\text{جـ} = \text{أ}\,(\text{ب جـ})$.

٣ . إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{bmatrix}$ ، بيِّن أن : $(\text{أ} + \text{ب})^2 \neq \text{أ}^2 + \text{ب}^2 + 2\,\text{أ ب}$

٤ . إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix}2 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix}\text{س} & 1\\ \text{ص} & 1\end{bmatrix}$ ، جد قيمة كل من س ، ص اللتين تجعلان $\text{أ ب} = \text{ب أ}$.

٥ . إكتب المعادلا الآتية باستخدام المصفوفات :

أ) ٦س + ص = ٤
٣س + ٢ص = −١

ب) س − ص + ع = ٣
س − ص + ٢ ع = ١
ص + ٢س − ع = ١

١-٣ المحددات (Determinants)

عرفنا أن المصفوفة هي تنظيم مستطيل الشكل وهي بحد ذاتها ليست عدداً ؛ ولكن يمكن ربط المصفوفة المربعة بعدد حقيقي يسمى محدد المصفوفة له أهميته في المصفوفا وتطبيقاتها ، وسنقصر حديثنا عن المحددا المرتبطة بالمصفوفات المربعة من الرتبة الثانية والثالثة .

تعـريف: محدد المصفوفة المربعة من الرتبة الثانية:

إذا كانت $س = \begin{bmatrix} س_{٢١} & س_{١١} \\ س_{٢٢} & س_{١٢} \end{bmatrix}$ فإن محدد $س$ و يرمز له بالرمز $|س|$ يعرف هكذا :

$$|س| = \begin{vmatrix} س_{٢١} & س_{١١} \\ س_{٢٢} & س_{١٢} \end{vmatrix} = س_{١١}س_{٢٢} - س_{٢١}س_{١٢} .$$

مثال (١):

إذا كانت $س = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، فجد قيمة محدد $س$.

الحل:

$$|س| = \begin{vmatrix} ٥ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix} = ٣\times٤ - ٢\times٥ = ٢$$

تعـريف: محدد المصفوفة المربعة من الرتبة الثالثة:

إذا كانت $س = \begin{bmatrix} س_{٣١} & س_{٢١} & س_{١١} \\ س_{٣٢} & س_{٢٢} & س_{١٢} \\ س_{٣٣} & س_{٢٣} & س_{١٣} \end{bmatrix}$ فيعرف $|س|$ كما يلي :

$$|س| = \begin{vmatrix} س_{٣١} & س_{٢١} & س_{١١} \\ س_{٣٢} & س_{٢٢} & س_{١٢} \\ س_{٣٣} & س_{٢٣} & س_{١٣} \end{vmatrix} = س_{١١}\begin{vmatrix} س_{٣٢} & س_{٢٢} \\ س_{٣٣} & س_{٢٣} \end{vmatrix} - س_{٢١}\begin{vmatrix} س_{٣٢} & س_{١٢} \\ س_{٣٣} & س_{١٣} \end{vmatrix} + س_{٣١}\begin{vmatrix} س_{٢٢} & س_{١٢} \\ س_{٢٣} & س_{١٣} \end{vmatrix}$$

ملاحظة(١):

يلاحظ أن قيمة المحدد عرفت بدلالة مدخلات الصف الأول وذلك بضرب كل مدخلة فيه بالمحدد الناتج بعد تصور شطب الصف ي والعمود هـ لهذه المدخلة وإعطاء إشارة لحاصل الضرب وفق القاعدة : $(-١)^{ي+هـ}$.

فمثلاً حاصل الضرب الأول في قيمة المحدد = $(-١)^{١+١}(س_{١١}) \begin{vmatrix} س_{٣١} & س_{٢١} & س_{١١} \\ س_{٣٢} & س_{٢٢} & س_{١٢} \\ س_{٣٣} & س_{٢٣} & س_{١٣} \end{vmatrix} = س_{١١}\begin{vmatrix} س_{٣٢} & س_{٢٢} \\ س_{٣٣} & س_{٢٣} \end{vmatrix}$

ملاحظة(٢):

يمكن استخدام أي صف أو أي عمود لإيجاد قيمة المحدد وفق الملاحظة السابقة .

مثال (٢) :

جد قيمة : $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 7 \\ -1 & 9 & 8 \end{vmatrix}$ أولاًباستخدام مدخلات الصف الاول .

ثانياًباستخدام مدخلات العمود الثاني .

الحل: أولاً :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 7 \\ -1 & 9 & 8 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ -1 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times -23 - 3 \times 55 + 4 \times 59 = 25$$

ثانياً :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 7 \\ -1 & 9 & 8 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} - 9 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$$

$= -3 \times 55 + 5 \times 20 - 9 \times -10 = 25$. لاحظ تساوي الناتجين .

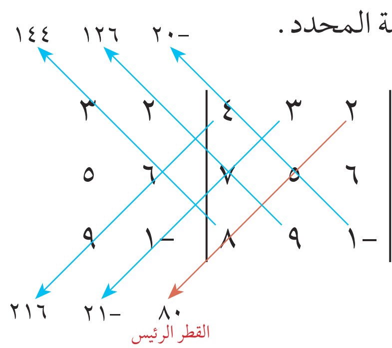
ملاحظة(٣):

يمكن إيجاد قيمة المحدد للمصفوفة المربعة من الرتبة الثالثة بالطريقة البديلة الآتية :

١- نكتب مرة ثانية العمودين الاول والثاني لِيُكَوِّنا عمودين جديدين : عموداً رابعاً وعموداً خامساً .

٢- نجمع حواصل ضرب المدخلات على القطر الرئيس والقطرين الموازيين له ونطرح منها حواصل ضرب المدخلات على الأقطار الثلاثة الأخرى فيكون الناتج هو قيمة المحدد .

فمثلاً لإيجاد قيمة المحدد في المثال السابق نكتب :



قيمة المحدد = $(80 + -21 + 216) - (-20 + 126 + 144) = 275 - 250 = 25$

خصائص المحددات:

لتسهيل حساب قيمة المحدد خاصة إذا كانت المدخلا   أعداداً كبيرة، فإنه يمكن الاستفادة من الخصائص التالية للمحددا   والتي يمكن إثباتها باستخدام التعريف مباشرة :

١ . إذا كانت مدخلا   أي صف كلها أصفاراً فإن قيمة المحدد تساوي صفراً .

فمثلاً $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$

٢ . عند تبديل الصفوف بالأعمدة والأعمدة بالصفوف بنفس ترتيبها فإن قيمة المحدد لا تتغير .

فمثلاً $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 15$ ، $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 15$. تحقق من ذلك .

٣ . عند تبديل صفين من صفوف المحدد وضعيهما فإن قيمة المحدد الناتج تساوي قيمة المحدد الأصلي مضروباً في (−١) أي تتغير إشارة قيمة المحدد الأصلي .

فمثلاً $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 15$ ، $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -15$. تحقق من ذلك .

٤ . إذا كان أحد الصفوف من مضاعفا   صف آخر فإن محدد تلك المصفوفة يساوي صفراً .

فمثلاً $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & -1 \\ 2 & 8 & 4 \end{vmatrix} =$ صفر .   (لاحظ أن $ص_3 = 2ص_1$)

٥ . إذا أضيفت لمدخلا   أي صف في محدد مضاعفا   نظائرها في صف آخر فإن قيمة المحدد لا تتغير .

فمثلاً $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 15 \end{vmatrix} = 15$ ، $\begin{vmatrix} 3+2\times5 & 6+2\times15 \\ 5 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 36 \\ 5 & 15 \end{vmatrix} = 15$

٦ . إذا وجد عامل مشترك ك في جميع عناصر صف في محدد فإن هذا العامل يمكن أخذه خارج المحدد ويكون المحدد الأصلي = ك × المحدد الناتج (بعد أخذ هذا العامل المشترك) .

فمثلاً $\begin{vmatrix} ٥ & -٢ \\ ٦ & ١٢ \end{vmatrix} = ٦ \begin{vmatrix} ٥ & -٢ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix}$ (إخراج ٦ عامل مشترك من $\text{ص}_٢$)

$= ٦ \times (١٠ + ٢) = ٧٢$

ملاحظة(٤): تبقى جميع هذه الخصائص صحيحة عند استبدال كلمة صف بكلمة عمود حيثما ورد .

مثال (٣): إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة الثانية فأثبت أن $|\text{ك أ}| = \text{ك}^٢ |\text{أ}|$ ، ك $\in$ ح .

البرهان: لتكن $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} \end{bmatrix} \Leftarrow \text{ك أ} = \begin{bmatrix} \text{ك أ}_{١١} & \text{ك أ}_{٢١} \\ \text{ك أ}_{١٢} & \text{ك أ}_{٢٢} \end{bmatrix}$

$\Leftarrow |\text{ك أ}| = \begin{vmatrix} \text{ك أ}_{١١} & \text{ك أ}_{٢١} \\ \text{ك أ}_{١٢} & \text{ك أ}_{٢٢} \end{vmatrix} = \text{ك} \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} \\ \text{ك أ}_{١٢} & \text{ك أ}_{٢٢} \end{vmatrix}$ (إخراج ك عامل مشترك من $\text{ص}_١$)

$= \text{ك}^٢ \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} \end{vmatrix}$ (إخراج ك عامل مشترك من $\text{ص}_٢$)

$= \text{ك}^٢ |\text{أ}|$ وهو المطلوب.

بوجه عام: اذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة ن فإن $|\text{ك أ}| = \text{ك}^{\text{ن}} |\text{أ}|$ ، ك $\in$ ح .

مثال(٤): استخدم خواص المحددات لإثبات أن: $\begin{vmatrix} \text{ب+جـ} & \text{أ} & ١ \\ \text{جـ + أ} & \text{ب} & ١ \\ \text{ب + أ} & \text{جـ} & ١ \end{vmatrix} = $ صفر

الحل: $\begin{vmatrix} \text{ب+جـ} & \text{أ} & ١ \\ \text{جـ + أ} & \text{ب} & ١ \\ \text{ب + أ} & \text{جـ} & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ب+جـ+أ} & \text{أ} & ١ \\ \text{جـ+أ+ب} & \text{ب} & ١ \\ \text{ب+أ+جـ} & \text{جـ} & ١ \end{vmatrix}$ (إضافة عمود إلى آخر لا يغير قيمة المحدد)

$= (\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ}) \begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & ١ \\ ١ & \text{ب} & ١ \\ ١ & \text{جـ} & ١ \end{vmatrix}$ (إخراج عامل مشترك)

$= (\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ}) \times ٠ = ٠$ (تساوي عمودين يجعل قيمة المحدد صفراً).

تمارين ١–٣ :

١ . أذكر خاصية/ خصائص المحددات المستخدمة في كل من المتساويات الآتية :

أ) $\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$

ب) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$

جـ) $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$

د) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 19 \end{vmatrix}$

٢ . أوجد بطريقتين قيمة كل من المحددين التاليين :

أ) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 8 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

ب) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

١-٤ النظير الضربي للمصفوفة المربعة:

سبق أن عرفنا مصفوفة الوحدة (المحايدة) م من الرتبة ن بأنها المصفوفة المربعة حيث $م_{ي هـ} = \begin{cases} ١ \text{ ، عندما ي = هـ} \\ ٠ \text{ ، عندما ي} \neq \text{هـ} \end{cases}$
وهذه المصفوفة تحقق الخاصية التالية : أ م = م أ = أ لجميع المصفوفات أ من الرتبة ن .

تعـريف: **النظير الضربي للمصفوفة المربعة:**

إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة ن ، فإن المصفوفة ب من الرتبة ن تسمى نظيراً ضربياً (معكوساً) للمصفوفة أ إذا كان أ ب = ب أ = م ، حيث م المصفوفة المحايدة من الرتبة ن . يرمز عادة للنظير الضربي للمصفوفة أ بالرمز $أ^{-١}$ ، أي أن $ب = أ^{-١}$.

مثال (١): بين أن المصفوفة ب = $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي للمصفوفة أ = $\begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$

الحل:

$$أ ب = \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ١ & -١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = م_{٢} ،$$

$$ب أ = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ١ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = م_{٢} ،$$

$$\Leftarrow ب = أ^{-١}$$

مثال (٢): بين أن المصفوفة ب = $\begin{bmatrix} -١٩ & ٨ & -٢ \\ ١٠ & -٤ & ١ \\ ٧ & -٣ & ١ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي للمصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ٤ & ١ & ٢ \\ ١ & ٥ & ٣ \\ ٠ & ٢ & ١ \end{bmatrix}$

الحل:

$$أ ب = \begin{bmatrix} ٤ & ١ & ٢ \\ ١ & ٥ & ٣ \\ ٠ & ٢ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -١٩ & ٨ & -٢ \\ ١٠ & -٤ & ١ \\ ٧ & -٣ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} = م_{٣} ،$$

$$ب أ = \begin{bmatrix} -١٩ & ٨ & -٢ \\ ١٠ & -٤ & ١ \\ ٧ & -٣ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٤ & ١ & ٢ \\ ١ & ٥ & ٣ \\ ٠ & ٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} = م_{٣} ،$$

$$\Leftarrow ب = أ^{-١}$$

مثال (٣): أثبت أن المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ليس لها نظير ضربي .

البرهان:

نفرض أن للمصفوفة أ نظيراً ضربياً أ$^{-١}$ = $\begin{bmatrix} ص & س \\ ن & ع \end{bmatrix}$

$\Leftarrow$ أ أ$^{-١}$ = أ$^{-١}$ أ = م$_{٢}$

$\Leftarrow$ $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} ص & س \\ ن & ع \end{bmatrix}$ = م$_{٢}$ $\Leftarrow$ $\begin{bmatrix} ص & س \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ وهذا مستحيل .

$\Leftarrow$ لا يوجد للمصفوفة أ نظير ضربي .   وهو المطلوب .

من الأمثلة السابقة نلاحظ أن بعض المصفوفا المربعة لها نظير ضربي وبعضها الآخر ليس له نظير ضربي .

تعـريف: المصفوفة المنفردة (Singular Matrix):

المصفوفة المربعة التي ليس لها نظير ضربي تسمى مصفوفة منفردة .

والمصفوفة المربعة التي لها نظير ضربي تسمى مصفوفة غير منفردة .

ويمكن تمييز المصفوفة المنفردة من خلال المحدد كما يتضح من النظرية التالية والتي نقدمها دون برهان .

نظرية:

تكون المصفوفة المربعة أ مصفوفة منفردة إذا وفقط إذا كان |أ| = صفراً .

مثال (٤): أي من المصفوفا أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ١- \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٦ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٤ & ٢ \\ ٥ & ١- & ٣ \end{bmatrix}$ منفردة؟

الحل:

|أ| = $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ١- \end{vmatrix}$ = ١١ ≠ ٠ $\Leftarrow$ أ مصفوفة غير منفردة .

|ب| = $\begin{vmatrix} ٦ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix}$ = ٠ $\Leftarrow$ ب مصفوفة منفردة .

|جـ| = $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٤ & ٢ \\ ٥ & ١- & ٣ \end{vmatrix}$ = ٠ لأن مدخلا الصف الثاني ضعفا مدخلا الصف الاول $\Leftarrow$ جـ منفردة .

إيجاد النظير الضربي للمصفوفة المربعة من الرتبة الثانية:

نلاحظ من النظرية السابقة أنه باستخدام المحددات يمكن الحكم على وجود نظير ضربي لمصفوفة أم لا وسنتعرف فيما يلي على طريقة إيجاد النظير الضربي للمصفوفة المربعة من الرتبة الثانية في حال وجوده .

مثال (٥) : أوجد النظير الضربي للمصفوفة $\text{أ} = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$

الحل: نفرض أن $\text{أ}^{-١} = \begin{bmatrix} \text{ص} & \text{س} \\ \text{ل} & \text{ع} \end{bmatrix}$

بما أن $\text{أ}\ \text{أ}^{-١} = \text{أ}^{-١}\ \text{أ} = \text{م}_{٢} \Leftarrow \begin{bmatrix} \text{ص} & \text{س} \\ \text{ل} & \text{ع} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

$$\Leftarrow \begin{bmatrix} \text{س+٣ص} & \text{س+ص} \\ \text{ع + ٣ل} & \text{ع+ل} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$$

$\Leftarrow$ س+ص = ١ وَ س+٣ص = ٠

ومنهما س = $\frac{٣}{٢}$ ، ص = $-\frac{١}{٢}$

وكذلك ع+ل = ٠ وَ ع+٣ل = ١

ومنهما ع = $-\frac{١}{٢}$ ، ل = $\frac{١}{٢}$

$$\Leftarrow \text{أ}^{-١} = \begin{bmatrix} -\frac{١}{٢} & \frac{٣}{٢} \\ \frac{١}{٢} & -\frac{١}{٢} \end{bmatrix} = \frac{١}{٢} \begin{bmatrix} ١- & ٣ \\ ١ & ١- \end{bmatrix} = \frac{١}{|\text{أ}|} \begin{bmatrix} ١- & ٣ \\ ١ & ١- \end{bmatrix}$$

أي أن :

$\text{أ}^{-١} = \frac{١}{\text{محدد أ}} \times$ المصفوفة الناتجة عن أ بعد تبديل المدخلتين على القطر الرئيس

(الذي يحوي المدخلتين $\text{أ}_{١١}$ ، $\text{أ}_{٢٢}$) وتغيير إشارتي المدخلتين على القطر الآخر .

وهذا يقودنا إلى التعميم الآتي :

اذا كانت $\text{س} = \begin{bmatrix} \text{س}_{٢١} & \text{س}_{١١} \\ \text{س}_{٢٢} & \text{س}_{١٢} \end{bmatrix}$ وكان $|\text{س}| \neq ٠$ فإن $\text{س}^{-١} = \frac{١}{|\text{س}|} \begin{bmatrix} -\text{س}_{٢١} & \text{س}_{٢٢} \\ \text{س}_{١١} & -\text{س}_{١٢} \end{bmatrix}$.

تمارين ١ – ٤ :

١ . أي من المصفوفات التالية منفردة؟

$$أ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} \text{ ، } ب = \begin{bmatrix} \text{س} & -١ \\ ١ & \text{س} \end{bmatrix} \text{ ، س عدد حقيقي ، } جـ = \begin{bmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ ١ & ٢ & -١ \\ ٢ & ١ & ١ \end{bmatrix} .$$

٢ . جد قيمة / قيم س الحقيقية التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} \text{س} & ١ \\ ٠ & \text{س}-١ \end{bmatrix}$ مصفوفة منفردة .

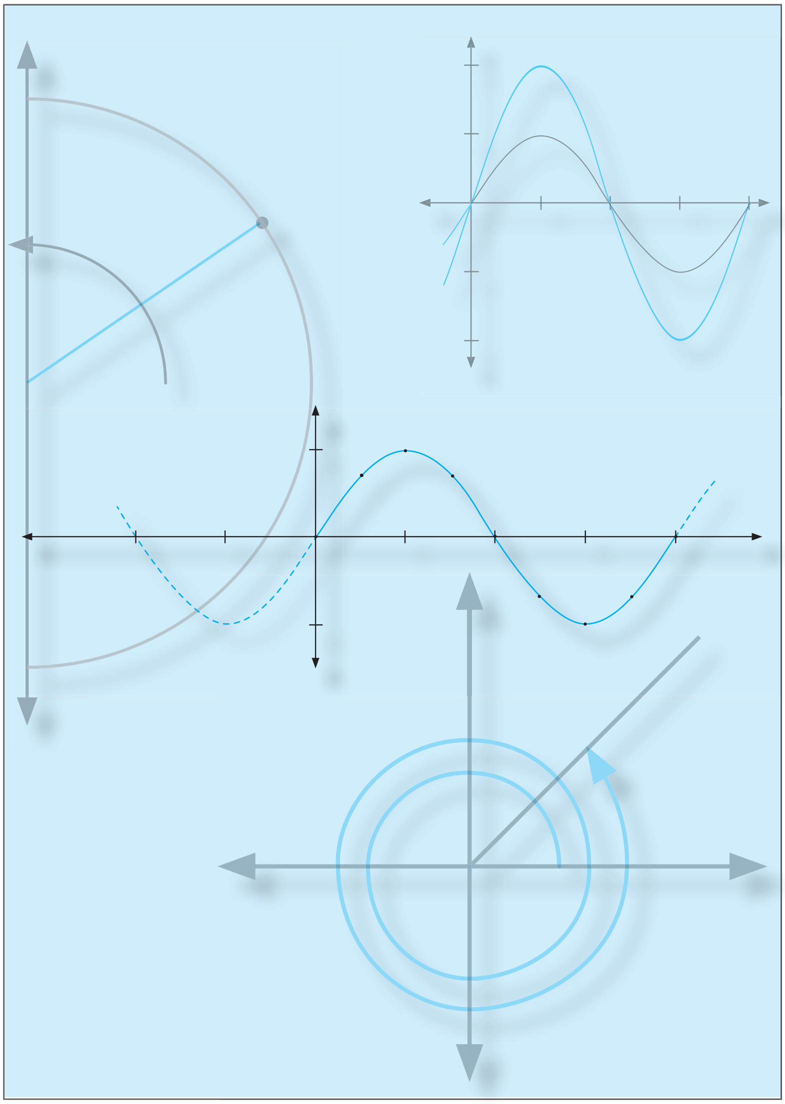
٣ . بين أن النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & ١ & ٤ \\ ٢ & ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ هو المصفوفة $\begin{bmatrix} -١١ & ٢ & ٥ \\ ٣ & -١ & -١ \\ ٢ & ٠ & -١ \end{bmatrix}$.

٤ . إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{٣}}{٢} & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٢} & -\frac{\sqrt{٣}}{٢} \end{bmatrix}$ فأثبت أن $أ^{-١} = أ$.

الوحدة الثانية

2

النهايات والاتصال



1-2 نظريات النهايات (Limit Theorems)

تبين لنا أن عملية حساب نهاية الاقتران عند نقطة بالاعتماد على تكوين جدول يمكن أن تكون عملية طويلة وشاقة؛ وتفيدنا نظريات النهايات التي سندرسها في هذا البند في معالجة هذا الوضع، وحساب النهاية بيسر وسهولة، وبخاصة في بعض الاقترانات مثل كثيرات الحدود والاقترانات النسبية وغيرها.

مثال (١)

ليكن ق(س) = ٣، س ∈ ح، أوجد $\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ ق(س).

الحل:

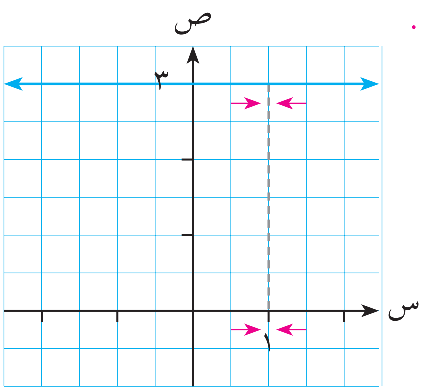
بما أن ق(س) = ٣ لجميع قيم س الحقيقية

فإنه عندما تتخذ س قيماً قريبة من ١ من جهة اليمين

أو اليسار، انظر الشكل (١-٩).

فإن ق(س) تساوي ٣؛ أي أن:

$\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ ق(س) = ٣.



الشكل (١-٩)

بوجه عام:

نظرية (١):

إذا كان ق(س) = جـ، حيث جـ ثابت، فإنه لأي عدد حقيقي أ، $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ ق(س) = جـ.

مثال (٢)

إذا كان ق(س) = س، س ∈ ح،

أوجد $\lim\limits_{س \leftarrow ٢}$ ق(س).

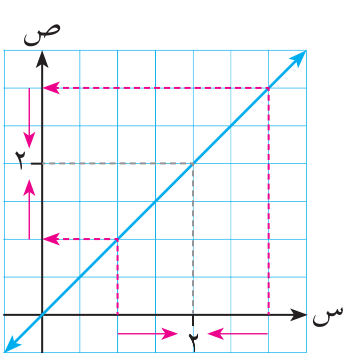
الحل:

بما أن ق (س) = س لجميع قيم س الحقيقية

فإنه عندما تقترب س من ٢ من جهة اليمين أو اليسار

فإن ق(س) تقترب من ٢ أيضاً، انظر الشكل (١-١٠).

أي أن $\lim\limits_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) = ٢



الشكل (١-١٠)

بوجه عام:

نظرية (٢):

إذا كان ق(س) = س ، س ∈ ح فإنه لأي عدد حقيقي أ ، $\lim_{س \leftarrow أ}$ ق(س) = أ

النظرية التالية تمكننا من حساب النهاية لاقتران مكون من اقترانين تربطهما عمليات جمع، أو طرح، أو ضرب، أو قسمة؛ ونقدمها دون برهان.

نظرية (٣)

إذا كانت $\lim_{س \leftarrow م}$ ق(س) = ل، $\lim_{س \leftarrow م}$ هـ(س) = م وكان جـ عدداً حقيقياً فإن:

١ $\lim_{س \leftarrow م}$ جـ ق(س) = جـ $\lim_{س \leftarrow م}$ ق(س) = جـ × ل (الضرب في عدد حقيقي)

٢ $\lim_{س \leftarrow م}$ (ق(س) + هـ(س)) = $\lim_{س \leftarrow م}$ ق(س) + $\lim_{س \leftarrow م}$ هـ(س) = ل + م (قاعدة الجمع)

٣ $\lim_{س \leftarrow م}$ (ق(س) − هـ(س)) = $\lim_{س \leftarrow م}$ ق(س) − $\lim_{س \leftarrow م}$ هـ(س) = ل − م (قاعدة الطرح)

٤ $\lim_{س \leftarrow م}$ (ق(س) × هـ(س)) = $\lim_{س \leftarrow م}$ ق(س) × $\lim_{س \leftarrow م}$ هـ(س) = ل × م (قاعدة الضرب)

٥ $\lim_{س \leftarrow م} \frac{ق(س)}{هـ(س)} = \frac{\lim_{س \leftarrow م} ق(س)}{\lim_{س \leftarrow م} هـ(س)} = \frac{ل}{م}$ ، بشرط م ≠ ٠ (قاعدة القسمة)

مثال (٣)

إذا كانت $\lim_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) = ٤ ، $\lim_{س \leftarrow ٢}$ هـ(س) = ٦ ، فأوجد:

أ $\lim_{س \leftarrow ٢}$ (ق(س) + ٢هـ(س))

ب $\lim_{س \leftarrow ٢}$ (س − ق(س))

جـ $\lim_{س \leftarrow ٢} \left(\frac{ق(س) \times هـ(س)}{س + هـ(س)}\right)$

د $\lim_{س \leftarrow ٢}$ (ق^{٢}(س) + ٥)

الحل:

أ

$$\underset{\text{س}\leftarrow\text{٢}}{\text{نها}}\left(\text{ق(س)}+\text{٢هـ(س)}\right)=\underset{\text{س}\leftarrow\text{٢}}{\text{نها}}\text{ ق(س)}+\underset{\text{س}\leftarrow\text{٢}}{\text{نها}}\text{ ٢هـ(س)}$$

$$=\underset{\text{س}\leftarrow\text{٢}}{\text{نها}}\text{ ق(س)}+\text{٢}\underset{\text{س}\leftarrow\text{٢}}{\text{نها}}\text{ هـ(س)}$$

$$=\text{٤}+\text{٢}\times\text{٦}$$

$$=\text{١٦}$$

ب

$$\underset{\text{س}\leftarrow\text{٢}}{\text{نها}}\left(\text{س}-\text{ق(س)}\right)=\underset{\text{س}\leftarrow\text{٢}}{\text{نها}}\text{ س}-\underset{\text{س}\leftarrow\text{٢}}{\text{نها}}\text{ ق(س)}$$

$$=\text{٢}-\text{٤}$$

$$=-\text{٢}$$

جـ

$$\underset{\text{س}\leftarrow\text{٢}}{\text{نها}}\left(\frac{\text{ق(س)}\times\text{هـ(س)}}{\text{س}+\text{هـ(س)}}\right)=\frac{\underset{\text{س}\leftarrow\text{٢}}{\text{نها}}\left(\text{ق(س)}\times\text{هـ(س)}\right)}{\underset{\text{س}\leftarrow\text{٢}}{\text{نها}}\left(\text{س}+\text{هـ(س)}\right)}$$

$$=\frac{\underset{\text{س}\leftarrow\text{٢}}{\text{نها}}\text{ ق(س)}\times\underset{\text{س}\leftarrow\text{٢}}{\text{نها}}\text{ هـ(س)}}{\underset{\text{س}\leftarrow\text{٢}}{\text{نها}}\text{ س}+\underset{\text{س}\leftarrow\text{٢}}{\text{نها}}\text{ هـ(س)}}$$

$$=\frac{\text{٤}\times\text{٦}}{\text{٢}+\text{٦}}$$

$$=\text{٣}$$

د

$$\underset{\text{س}\leftarrow\text{٢}}{\text{نها}}\left(\text{ق}^{\text{٢}}\text{(س)}+\text{٥}\right)=\underset{\text{س}\leftarrow\text{٢}}{\text{نها}}\text{ ق}^{\text{٢}}\text{(س)}+\underset{\text{س}\leftarrow\text{٢}}{\text{نها}}\text{ ٥}$$

$$=\underset{\text{س}\leftarrow\text{٢}}{\text{نها}}\text{ ق(س)}\times\underset{\text{س}\leftarrow\text{٢}}{\text{نها}}\text{ ق(س)}+\underset{\text{س}\leftarrow\text{٢}}{\text{نها}}\text{ ٥}$$

$$=\left(\text{٤}\times\text{٤}\right)+\text{٥}$$

$$=\text{٢١}$$

يمكن تعميم قاعدتي الجمع والضرب في النظرية (٣) السابقة لتشمل أكثر من اقترانين :

١ $\underset{\text{س}\to\text{م}}{\text{نهــا}}\left(\text{ق}_{١}(\text{س})+\text{ق}_{٢}(\text{س})+\ldots+\text{ق}_{\text{ن}}(\text{س})\right)=\underset{\text{س}\to\text{م}}{\text{نهــا}}\text{ق}_{١}(\text{س})+\underset{\text{س}\to\text{م}}{\text{نهــا}}\text{ق}_{٢}(\text{س})+\ldots+\underset{\text{س}\to\text{م}}{\text{نهــا}}\text{ق}_{\text{ن}}(\text{س})$

٢ $\underset{\text{س}\to\text{م}}{\text{نهــا}}\left(\text{ق}_{١}(\text{س})\times\text{ق}_{٢}(\text{س})\times\ldots\times\text{ق}_{\text{ن}}(\text{س})\right)=\underset{\text{س}\to\text{م}}{\text{نهــا}}\text{ق}_{١}(\text{س})\times\underset{\text{س}\to\text{م}}{\text{نهــا}}\text{ق}_{٢}(\text{س})\times\ldots\times\underset{\text{س}\to\text{م}}{\text{نهــا}}\text{ق}_{\text{ن}}(\text{س})$

نتائج:

١ $\underset{\text{س}\to\text{م}}{\text{نهــا}}\left(\text{ق}(\text{س})\right)^{\text{ن}}=\left(\underset{\text{س}\to\text{م}}{\text{نهــا}}\text{ق}(\text{س})\right)^{\text{ن}}$ ، حيث ن عدد صحيح موجب .

٢ $\underset{\text{س}\to\text{م}}{\text{نهــا}}\text{س}^{\text{ن}}=\text{م}^{\text{ن}}$ حيث ن عدد صحيح موجب .

٣ إذا كان $\text{ق}(\text{س})=\text{م}_{\text{ن}}\text{س}^{\text{ن}}+\text{م}_{\text{ن}-١}\text{س}^{\text{ن}-١}+\cdots+\text{م}_{١}\text{س}+\text{م}_{٠}$ اقتراناً كثير حدود فإن :

$\underset{\text{س}\to\text{جـ}}{\text{نهــا}}\text{ق}(\text{س})=\text{م}_{\text{ن}}\text{جـ}^{\text{ن}}+\text{م}_{\text{ن}-١}\text{جـ}^{\text{ن}-١}+\cdots+\text{م}_{١}\text{جـ}+\text{م}_{٠}=\text{ق}(\text{جـ})$.

أي أن نهاية كثير الحدود ق(س) عند س = جـ في مجاله تساوي ق(جـ) .

٤ إذا كان $\text{م}(\text{س})=\dfrac{\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})}$ اقتراناً نسبياً حيث ق(س) ، هـ(س) كثيرا حدود، هـ(س) $\neq ٠$ فإن :

$\underset{\text{س}\to\text{جـ}}{\text{نهــا}}\text{م}(\text{س})=\underset{\text{س}\to\text{جـ}}{\text{نهــا}}\dfrac{\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})}=\dfrac{\text{ق}(\text{جـ})}{\text{هـ}(\text{جـ})}=\text{م}(\text{جـ})$ بشرط هـ(جـ) $\neq ٠$

أي أن نهاية الاقتران النسبي م(س) عند س = جـ في مجاله تساوي م(جـ) .

مثال (٤)

أوجد $\underset{\text{س}\to٢}{\text{نهــا}}(٤\text{س}^{٣}+٥\text{س}+٦)$.

الحل:

الاقتران ق(س) = ٤س^٣ + ٥س + ٦ هو اقتران كثير حدود، إذن بالتعويض المباشر يكون :

$\underset{\text{س}\to٢}{\text{نهــا}}(٤\text{س}^{٣}+٥\text{س}+٦)=٤(٢)^{٣}+٥(٢)+٦=٤٨$

مثال (٥)

أوجد $\lim_{س \leftarrow ٥} \frac{س^٢ + ٤س + ٢}{٢س + ٣}$.

الحل:

الاقتران هـ(س) = $\frac{س^٢ + ٤س + ٢}{٢س + ٣}$ هو اقتران نسبي مقامه لا يساوي صفراً عند س = ٥،

إذن بالتعويض المباشر يكون:

$$\lim_{س \leftarrow ٥} \frac{س^٢ + ٤س + ٢}{٢س + ٣} = \frac{(٥)^٢ + ٤(٥) + ٢}{٢(٥) + ٣}$$

$$= \frac{٤٧}{١٣}$$

نظرية (٤)

إذا كانت $\lim_{س \leftarrow أ}$ ق(س) = ل، وكان ن عدداً صحيحاً موجباً فإن:

$\lim_{س \leftarrow أ} (ق(س))^{\frac{١}{ن}} = \left(\lim_{س \leftarrow أ} ق(س)\right)^{\frac{١}{ن}} = ل^{\frac{١}{ن}}$ ، بشرط أن تكون ل > ٠ عندما تكون (ن) زوجية.

أي أن $\lim_{س \leftarrow أ} \sqrt[ن]{ق(س)} = \sqrt[ن]{\lim_{س \leftarrow أ} ق(س)} = \sqrt[ن]{ل}$

مثال (٦)

أوجد كلاً من النهايتين التاليتين:

أ $\lim_{س \leftarrow ٤} \sqrt{س^٢ + ٩}$ ب $\lim_{س \leftarrow -١٠} \sqrt[٣]{س + ٢}$

الحل:

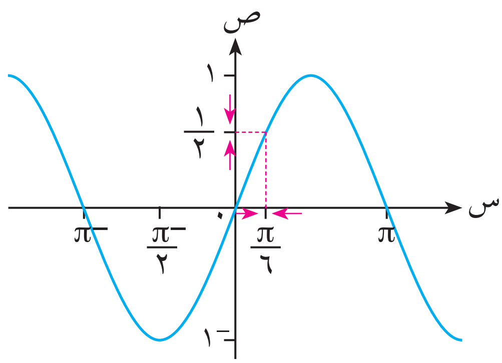
أ $\lim_{س \leftarrow ٤} \sqrt{س^٢ + ٩} = \sqrt{\lim_{س \leftarrow ٤} (س^٢ + ٩)} = \sqrt{١٦ + ٩} = ٥$

ب $\lim_{س \leftarrow -١٠} \sqrt[٣]{س + ٢} = \sqrt[٣]{\lim_{س \leftarrow -١٠} (س + ٢)} = \sqrt[٣]{-١٠ + ٢} = -٢$

مثال (٧)

يمثل الشكل (١-١١) منحنى الاقتران

ق(س) = حا س ، أوجد $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٦}}{\text{نهـا}}$ ق(س)



الشكل (١-١١)

الحل:

من الرسم البياني المقابل نلاحظ أن :

$$\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٦}}{\text{نهـا}} ق(س) = \underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٦}}{\text{نهـا}} حا\,س$$

$$= \frac{١}{٢}$$

بوجه عام:

١ $\underset{س \leftarrow ٩}{\text{نهـا}}$ جاس = جا ٩ ، لكل ٩ ∈ ح .

٢ $\underset{س \leftarrow ٩}{\text{نهـا}}$ جتاس = جتا ٩ ، لكل ٩ ∈ ح .

تمارين (1-2)

١ إذا كانت $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٥ ، $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ هـ(س) = ٣ ، $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ ك (س) = −١ ، فأوجد قيمة كلٍ من النهايات التالية :

أ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \Big(٢ق(س) - ٣\,هـ(س)\Big)$

ب $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{س\,ق\,(س)}{هـ\,(س) + ك(س)}$

جـ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \sqrt{ق^{٢}(س) - هـ^{٢}(س)}$

٢ إذا علمت أن $\underset{س \leftarrow ٩}{\text{نهـا}}(س^{٢} + ٥س + ٧) = ١$ ، فأوجد قيمة/ قيم ٩ .

٣ أوجد قيمة كل مما يلي :

أ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \sqrt{س^{٢}+٥}$

ب $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} (٣س^{٢} - ٤)^{\frac{١}{٣}}$

جـ $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{(س - ٥)^{٣}}{(٢س - ٥)^{٤} + ٢}$

٤ أ $\underset{س \to ١}{\text{نهـــا}}$ ق(س) ب $\underset{س \to ٣}{\text{نهـــا}}$ ق(س)

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^{٢}+٥ & ، \quad س \leq ١ \\ أس & ، \quad س > ١ \end{cases}$ ، وكانت $\underset{س \to ١}{\text{نهـــا}}$ ق(س) موجودة فما قيمة أ ؟

٥ إذا كانت $\underset{س \to ٥}{\text{نهـــا}}$ ق(س) = ٧ فأوجد $\underset{س \to ٣}{\text{نهـــا}}$ $\left(٤\,ق(٢س - ١) + س^{٢}\right)$

2-2 النهايات والصورة غير المُعَيَّنة $\frac{صفر}{صفر}$ (Limits & Indeterminate Forms)

وجدنا سابقاً أن قاعدة القسمة في النهايا تشترط ألا تكون نهاية المقام تساوي صفراً. غير أن هناك مقادير كسرية تكون نهاية كل من البسط والمقام فيها تساوي صفراً عند قيمة معينة لِـ س ، أي تكون $\frac{\text{نهاية البسط}}{\text{نهاية المقام}} = \frac{٠}{٠}$ ، وهذه الصورة تسمى صورة غير معينة لأنها لا تعطي نتيجة عددية محددة، ولكن يمكن حساب نهايات مثل هذه الاقترانات الكسرية، أحياناً، بإجراء عمليات جبرية لوضع الاقتران الكسري على صورة مكافئة، تتجاوز الصورة غير المعينة، كما يتضح من الأمثلة الآتية :

مثال (١)

أوجد $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{س^٣ - س}{٢س^٢ - س - ١}$

الحل:

نلاحظ أن $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} (س^٣ - س) = ٠$ وكذلك $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} (٢س^٢ - س - ١) = ٠$

لذلك نلجأ إلى تحليل كل من البسط والمقام وكتابة الاقتران الكسري على صورة مكافئة كما يلي :

$$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{س^٣ - س}{٢س^٢ - س - ١} = \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{س(س-١)(س+١)}{(س-١)(٢س+١)}$$

$$= \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{س(س+١)}{(٢س+١)} \quad ، \quad س \neq ١$$

$$= \frac{٢}{٣}$$

مثال (٢)

أوجد $\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س+٤} - ٣}{س - ٥}$.

الحل:

نلاحظ أن $\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{س+٤} - ٣\right) = ٠$ وكذلك $\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهـا}} (س-٥) = ٠$

لذا نلجأ إلى كتابة الاقتران بصورة مكافئة، وذلك بضرب كل من البسط والمقام في مرافق البسط كما يلي:

$$\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهــا}} \frac{\sqrt{س+٤} - ٣}{س - ٥} = \underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهــا}} \frac{\sqrt{س+٤} - ٣}{س - ٥} \times \frac{\sqrt{س+٤} + ٣}{\sqrt{س+٤} + ٣}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهــا}} \frac{(س+٤) - ٩}{(س-٥)(\sqrt{س+٤} + ٣)}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهــا}} \frac{(س - ٥)}{(س-٥)(\sqrt{س+٤} + ٣)}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهــا}} \frac{١}{(\sqrt{س+٤} + ٣)} ، س \neq ٥$$

$$= \frac{١}{٦}$$

مثال (٣)

أوجد $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\frac{١}{س+٢} - \frac{١}{٢}}{س}$.

الحل:

لاحظ أن: $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \left(\frac{١}{س+٢} - \frac{١}{٢}\right) = ٠$ وكذلك $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} س = ٠$

لذا نلجأ إلى كتابة الاقتران بصورة مكافئة، وذلك بتوحيد المقامات والاختصار كما يلي:

$$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\frac{١}{س+٢} - \frac{١}{٢}}{س} = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\frac{٢-(س+٢)}{٢(س+٢)}}{س}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \left(\frac{-س}{٢(س+٢)} \times \frac{١}{س}\right)$$

$$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{-١}{٢(س+٢)} \quad ، \quad س \neq ٠$$

$$= \frac{-١}{٤}$$

مثال (٤)

أوجد $\lim_{س \to م} \frac{س^٣ - م^٣}{س - م}$.

الحل:

بالتعويض المباشر نلاحظ أن النهاية = $\frac{٠}{٠}$ ، وهذه صورة غير معينة؛ ولذا نلجأ إلى كتابة الكسر بصورة أخرى مكافئة، وذلك بالتحليل إلى العوامل :

$$\lim_{س \to م} \frac{س^٣ - م^٣}{س - م} = \lim_{س \to م} \frac{(س - م)(س^٢ + م س + م^٢)}{(س - م)}$$

$$= \lim_{س \to م} (س^٢ + م س + م^٢) \quad ، \quad س \neq م$$

$$= ٣ م^٢$$

تعميم:

$\lim_{س \to م} \frac{س^ن - م^ن}{س - م} = ن م^{ن-١}$ حيث ن عدد صحيح موجب .

مثال (٥)

أوجد $\lim_{س \to ٣} \frac{(س + ٢)^٤ - ٦٢٥}{س - ٣}$.

الحل:

بفرض أن ص = س + ٢ ، تكون س = ص − ٢

وعندما س ← ٣ فإن ص ← ٥

$$\therefore \lim_{س \to ٣} \frac{(س + ٢)^٤ - ٦٢٥}{س - ٣} = \lim_{ص \to ٥} \frac{ص^٤ - ٥^٤}{ص - ٥} .$$

$$= ٤ \times ٥^٣$$

$$= ٤ \times ١٢٥$$

$$= ٥٠٠$$

تمارين (2-2)

١ أوجد قيمة كلٍ من النهايات التالية :

أ $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س + ١}{س^{٢} - س - ٢}$

ب $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} + ٢س - ٨}{س^{٢} - ٢س}$

جـ $\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \frac{\frac{١}{س + ٢} - \frac{١}{٧}}{س - ٥}$

د $\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} \frac{س - ٤}{\sqrt{س} - ٢}$

هـ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{س}{\sqrt{٩ + س} - ٣}$

و $\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٣} + ٢س^{٢} - س - ٢}{س^{٢} - ٤}$

ز $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{١ + س} - \sqrt{١ - س}}{س}$

ح $\underset{م \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{م^{٣} + ٨}{م + ٢}$

ط $\underset{س \to ١٥}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س - ٦} - ٣}{س - ١٥}$

ك $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^{٤} - ٨١}{س - ٣}$

ل $\underset{س \to \sqrt{٢}}{\text{نهـا}} \frac{س^{٦} - ٨}{س^{٤} - ٤}$

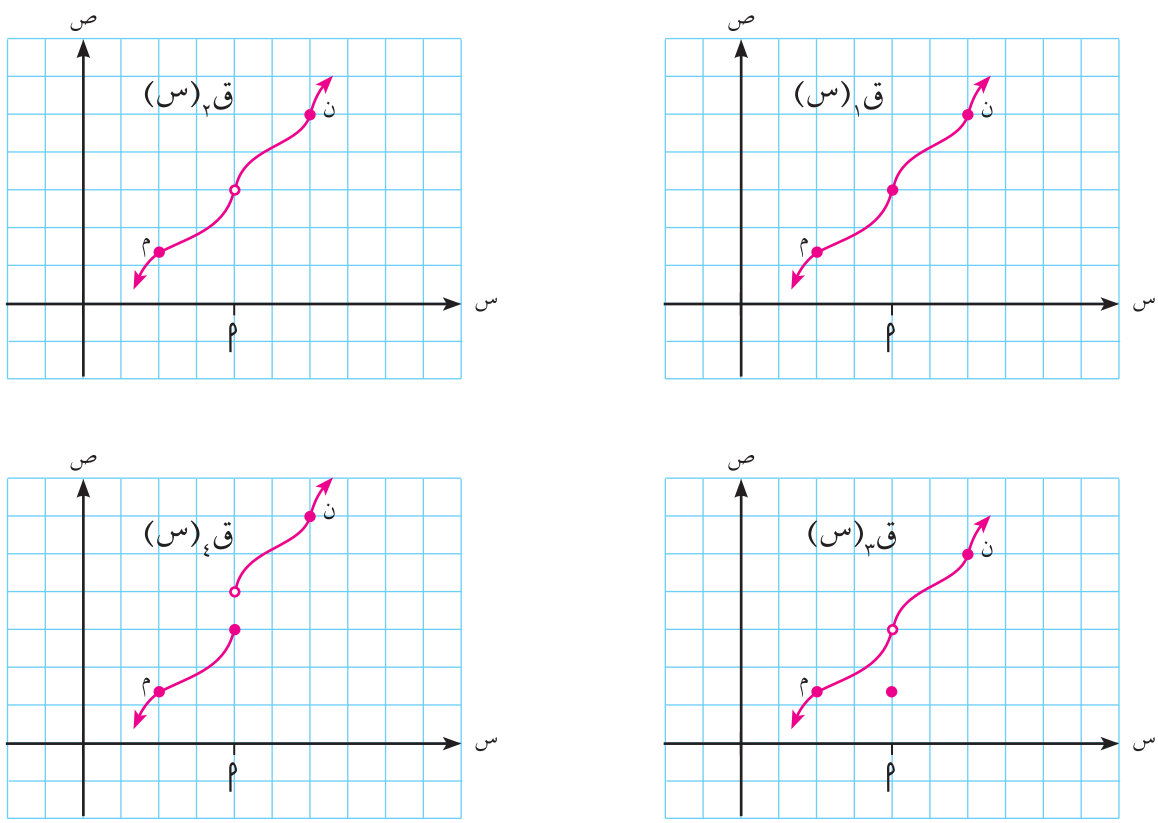
م $\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} \frac{(س - ١)^{٥} - ٢٤٣}{س - ٤}$

3-2 الاتصال (Continuity)

درسنا سابقاً نهاية الاقتران عند نقطة دون أي اعتبار خاص لقيمة الاقتران عند تلك النقطة، وفي هذا البند سندرس قيمة الاقتران ونهايته معاً.

اتصال الاقتران عند نقطة:

يوضح الشكل (١-١٥) منحنيات الاقترانات ق$_{١}$(س)، ق$_{٢}$(س)، ق$_{٣}$(س)، ق$_{٤}$(س) حول النقطة على المنحنى حيث س = أ :



الشكل (١-١٥)

نلاحظ أنه، في حالة الاقتران ق$_{١}$(س)، يمكن رسم جزء المنحنى الواقع بين النقطتين م، ن المجاورتين للنقطة عند س = أ دون الحاجة لرفع سن القلم عن الورقة؛ بينما لا نستطيع ذلك في حالة الاقترانات ق$_{٢}$(س)، ق$_{٣}$(س)، ق$_{٤}$(س).

نقول إن الاقتران ق$_{١}$(س) اقترانٌ متصل عند س= أ ، في حين أن الاقترانات ق$_{٢}$(س)، ق$_{٣}$(س)، ق$_{٤}$(س) اقترانات منفصلة أو غير متصلة عند س = أ .

تعريف:

يكون الاقتران ق(س) متصلاً عند س = أ في مجاله إذا وفقط إذا كانت $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}$ ق(س) = ق(أ)

وهذا يعني أن:

الاقتران ق(س) يكون متصلاً عند س = أ إذا وفقط إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية معاً:

١ ق(س) معرف عند س = أ

٢ $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}$ ق(س) موجودة

٣ $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}$ ق(س) = ق(أ)

وبالرجوع إلى منحنيات الاقترانات $ق_١$(س)، $ق_٢$(س)، $ق_٣$(س)، $ق_٤$(س)، في الشكل (١-١٥) السابق، نلاحظ أن:

١ $ق_١$(س) متصل عند س = أ لأن $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}$ $ق_١$(س) = $ق_١$(أ).

٢ $ق_٢$(س) غير متصل عند س = أ وذلك لأن $ق_٢$(س) غير معرف عند س = أ.

٣ $ق_٣$(س) غير متصل عند س = أ وذلك لأن $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}$ $ق_٣$(س) ≠ $ق_٣$(أ).

٤ $ق_٤$(س) غير متصل عند س = أ وذلك لأن $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}$ $ق_٤$(س) غير موجودة.

مثال (١)

ابحث في اتصال الاقتران ق(س) = $\begin{cases} س^٢ &، س \leqslant ١ \\ س+١ &، س > ١ \end{cases}$

أ عند س = ٠ ب عند س = ١

الحل:

أ ق(٠) = ٠

$\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا}$ $س^٢$ = صفر

بما أن $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا}$ ق(س) = ق(٠)

$\therefore$ ق(س) متصل عند س = ٠

ب ق(١) = ١

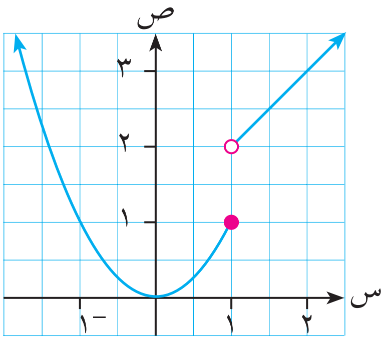
$\lim\limits_{س \leftarrow ١^+}$ ق(س) = $\lim\limits_{س \leftarrow ١^+}$ (س+١) = ٢

$\lim\limits_{س \leftarrow ١^-}$ ق(س) = $\lim\limits_{س \leftarrow ١^-}$ $س^٢$ = ١

$\Leftarrow$ $\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ ق(س) غير موجودة.

أي أن الاقتران ق(س) غير متصل عند س= ١

انظر منحنى الاقتران ق(س) في الشكل (١-١٦).



الشكل (١-١٦)

مثال (٢)

ابحث في اتصال الاقتران ق(س)= $\begin{cases} \dfrac{س^٢-٤}{س-٢} & ،\ س \neq ٢ \\ ٥ & ،\ س = ٢ \end{cases}$ ، عند س = ٢

الحل:

$\lim\limits_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) = $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \dfrac{س^٢-٤}{س-٢}$

= $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \dfrac{(س+٢)(س-٢)}{س-٢}$

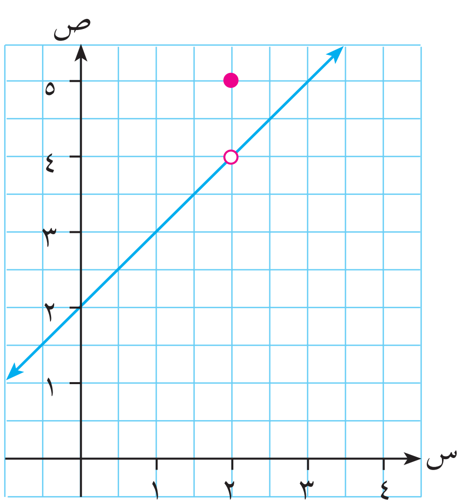
= $\lim\limits_{س \leftarrow ٢}$ (س+٢) = ٤

ق(٢) = ٥

وبما أن $\lim\limits_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) $\neq$ ق(٢)

$\therefore$ ق(س) غير متصل (منفصل) عند س = ٢

لاحظ الشكل (١-١٧)



الشكل (١-١٧)

ملاحظة:

نلاحظ في المثال السابق أن ق(س) غير متصل عند س = ٢ لأن $\lim\limits_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) $\neq$ ق(٢). ولكن إذا أعدنا تعريف الاقتران عند س = ٢ ليصبح ق(٢) = ٤ فإن ق(س) يصبح متصلاً عند س = ٢.

مثال (٣)

أوجد قيمة جـ التي تجعل الاقتران ق(س) = $\begin{cases} ٢س + جـ & ، س \leqslant ١ \\ س^٢ + ٣ & ، س > ١ \end{cases}$

متصلاً عند س = ١ .

الحل:

حتى يكون الاقتران ق(س) متصلاً عند س = ١ ، يجب أن تكون $\lim_{س \to ١}$ ق(س) موجودة وتساوي ق(١) .

$\Leftarrow$ $\lim_{س \to ١^+}$ ق(س) = $\lim_{س \to ١^-}$ ق(س) = ق(١)

$\therefore$ ٤ = ٢ + جـ ، ومنها جـ = ٢

نظريات الاتصال

بالاعتماد على نظريات النهايات السابقة يمكن التوصل إلى النظريات التالية التي تساعدنا في دراسة اتصال اقترانات معرفة بدلالة اقترانات أخرى متصلة .

نظرية (١):

إذا كان ق(س)، هـ(س) اقترانين متصلين عند س = أ فإن :

١ (ق + هـ) (س) متصل عند س = أ

٢ (ق − هـ) (س) متصل عند س = أ

٣ (ق . هـ) (س) متصل عند س = أ

٤ ك . هـ(س) متصل عند س = أ حيث ك $\in$ ح

٥ $\left(\frac{ق}{هـ}\right)$(س) متصل عند س = أ حيث هـ(أ) $\neq$ ٠

٦ $\sqrt[ن]{ق(س)}$ متصل عند س = أ حيث ن عدد صحيح موجب، وبشرط أن ق(أ) > ٠ إذا كانت ن زوجية .

مثال (٤)

ليكن ق(س) اقتراناً متصلاً عند س = ٢ . ابحث في اتصال كل من الاقترانات التالية عند س = ٢

أ ع(س) = س^٢ + ق(س) ب ل(س) = $\frac{ق(س)}{س + ٥}$ جـ هـ(س) = $\sqrt{س^٢ - ١}$

الحل:

أ الاقتران $س^٢$ متصل عند $س = ٢$ (لماذا؟)

∴ الاقتران $ع(س) = س^٢ + ق(س)$ متصل عند $س = ٢$ ؛ لأنه مجموع اقترانين متصلين عند النقطة نفسها.

ب الاقتران $س + ٥$ متصل عند $س = ٢$ (لماذا؟)

∴ الاقتران $ل(س) = \frac{ق(س)}{س + ٥}$ متصل عند $س = ٢$ ؛ لأنه ناتج قسمة اقترانين متصلين عند النقطة نفسها، وقيمة المقام عند $٢ \neq ٠$

جـ الاقتران $س^٢ - ١$ متصل عند $س = ٢$ (لماذا؟)

∴ الاقتران $هـ(س) = \sqrt{س^٢ - ١}$ متصل عند $س = ٢$ (نظرية (١) فرع ٦)

اتصال الاقتران على فترة:

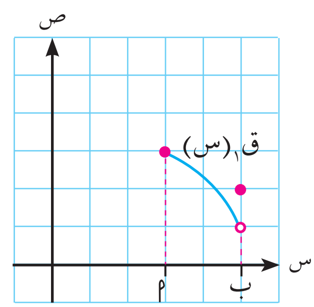
تعريف:

إذا كان ق(س) اقتراناً معرفاً على الفترة المغلقة [ﻫ، ب] فإن الاقتران ق(س) يكون:

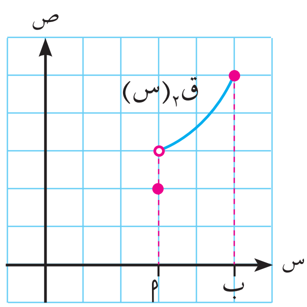
١ متصلاً من جهة اليمين عند $س = ﻫ$ إذا كانت $\lim_{س \leftarrow ﻫ^+} ق(س) = ق(ﻫ)$.

٢ متصلاً من جهة اليسار عند $س = ب$ إذا كانت $\lim_{س \leftarrow ب^-} ق(س) = ق(ب)$.

لاحظ التوضيح التالي في الشكل (١-١٨):



$ق_١(س)$ متصل عند $س = ﻫ$ من جهة اليمين
ومنفصل عند $س = ب$ من جهة اليسار



$ق_٢(س)$ متصل عند $س = ب$ من جهة اليسار
ومنفصل عند $س = ﻫ$ من جهة اليمين

الشكل (١-١٨)

تعريف:

١ يكون الاقتران ق(س) متصلاً على الفترة المفتوحة]أ، ب[إذا كان متصلاً عند كل نقطة في الفترة .

٢ يكون الاقتران ق(س) متصلاً على الفترة المغلقة [أ، ب] إذا كان متصلاً عند كل نقطة في الفترة المفتوحة]أ، ب[، وكان متصلاً عند س = أ من جهة اليمين وعند س = ب من جهة اليسار .

بالاعتماد على التعريف السابق ونهايات الاقترانات يمكنك التحقق من صحة كل مما يلي :

١ الاقتران كثير الحدود يكون متصلاً على ح .

٢ الاقتران النسبي يكون متصلاً على ح عدا أصفار المقام .

٣ اقتران الجيب واقتران جيب التمام متصلان على ح .

٤ اقتران القيمة المطلقة ق(س) = |س| متصل على ح .

مثال (٥)

ابحث في اتصال الاقترانات التالية :

أ ق(س) = س^{٢} + ٥

ب هـ (س) = $\frac{س^{٢}+١}{س^{٢}-٤}$

جـ ل(س) = ظا س على الفترة] ٠ ، π [

الحل:

أ ق(س) = س^{٢} + ٥ اقتران كثير حدود فهو متصل عند جميع قيم س ∈ ح .

ب هـ(س) = $\frac{س^{٢}+١}{س^{٢}-٤}$ اقتران نسبي فهو متصل عند جميع قيم س ∈ ح عدا س= ٢ ، س=-٢

جـ ل(س) = ظا س = $\frac{جاس}{جتاس}$ خارج قسمة اقترانين متصلين

فهو متصل عند جميع قيم س ∈] ٠ ، π [ما عدا س = $\frac{\pi}{٢}$ (صفر المقام)

مثال (٦)

$$\text{ليكن ق(س)} = \begin{cases} \text{س} + ٢ & ، \quad ٠ \le \text{س} \le ١ \\ ٣ & ، \quad ١ < \text{س} \le ٢ \end{cases}$$

ابحث في اتصال الاقتران ق(س) على الفترة [٠ ، ٢].

الحل:

أولاً: الاقتران ق(س) متصل على الفترة المفتوحة]٠ ، ١[لأنه كثير حدود.

ثانياً: الاقتران ق(س) متصل على الفترة المفتوحة]١ ، ٢[لأنه كثير حدود.

ثالثاً: الاقتران ق(س) متصل عند س = ١ لأن:

$$\lim_{\text{س} \to ١^+} \text{ق(س)} = \lim_{\text{س} \to ١^-} \text{ق(س)} = \text{ق(١)} = ٣$$

رابعاً: الاقتران ق(س) متصل عند س = ٠ من جهة اليمين؛ لأن:

$$\lim_{\text{س} \to ٠^+} \text{ق(س)} = \lim_{\text{س} \to ٠^+} (\text{س}+٢) = \text{ق(٠)} = ٢$$

خامساً: الاقتران ق(س) متصل عند س = ٢ من جهة اليسار؛ لأن:

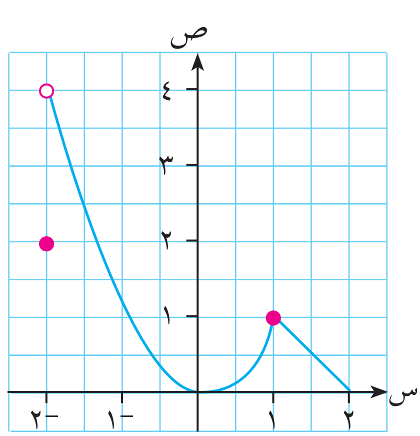
$$\lim_{\text{س} \to ٢^-} \text{ق(س)} = \text{ق(٢)} = ٣$$

∴ ق(س) متصل على [٠ ، ٢]

مثال (٧)

$$\text{ليكن ق(س)} = \begin{cases} ٢ & ، \quad \text{س} = -٢ \\ \text{س}^٢ & ، \quad -٢ < \text{س} \le ١ \\ ٢ - \text{س} & ، \quad ١ < \text{س} \le ٢ \end{cases}$$

ارسم منحنى ق(س) ثم ابحث في اتصال ق(س) على الفترة [-٢ ، ٢].



الشكل (١-١٩)

الحل:

يمثل الشكل (١-١٩) منحنى الاقتران ق(س).

أولاً: ق(س) متصل على الفترة المفتوحة]-٢ ، ١[لأنه كثير حدود.

ثانياً: ق(س) متصل على الفترة المفتوحة]١ , ٢[لأنه كثير حدود أيضاً.

ثالثاً: ق(س) متصل عند س = ١ لأن:

$\underset{س \leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}}$ (٢−س) = ١ ، $\underset{س \leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}}$ س^{٢} = ١

∴ $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ق(١) = ١

رابعاً: ق(س) غير متصل عند س = −٢ من جهة اليمين لأن:

$\underset{س \leftarrow -٢^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow -٢^{+}}{\text{نهـا}}$ س^{٢} = ٤ بينما ق(−٢) = ٢

أي أن $\underset{س \leftarrow -٢^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) ≠ ق(−٢)

خامساً: ق(س) متصل عند س = ٢ من اليسار لأن:

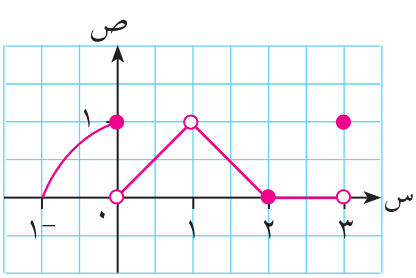
$\underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهـا}}$ (٢−س) = ٠ ، ق(٢) = ٠

أي أن $\underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ق(٢)

∴ ق(س) غير متصل على [−٢ ، ٢]

لاحظ أن ق(س) متصل على]−٢ ، ٢] لأنه متصل عند جميع قيم س ∈]−٢ ، ٢[، ومتصل عند س = ٢ من اليسار.

تمارين (3-2)



١ يمثل الشكل المقابل منحنى الاقتران ق(س) على [−١ ، ٣].

بين أي العبارات التالية صائبة وأيها خاطئة مع ذكر السبب:

أ ق(س) متصل عند س = −١ من جهة اليسار.

ب ق(س) متصل عند س = ١

جـ ق(س) غير متصل عند س = ٠

د ق(س) متصل عند س = ٢

هـ ق(س) متصل على الفترة [−١ ، ٠].

و ق(س) متصل على الفترة] ٠ ، ١[.

ز ق(س) متصل على الفترة] ١ ، ٣[.

ح يمكن تعريف ق(س) عند س = ١ ليصبح متصلاً عندها.

ط يمكن اعادة تعريف ق(س) عند س = ٠ ليصبح متصلاً عندها.

٢ ليكن ق(س) = $\begin{cases} \text{٢} - \text{س} & ، \quad \text{٠} \leq \text{س} \leq \text{١} \\ \text{١} & ، \quad \text{١} < \text{س} < \text{٢} \\ \text{٥} & ، \quad \text{س} = \text{٢} \end{cases}$ ابحث في اتصال ق(س) على الفترة [٠ ، ٢] .

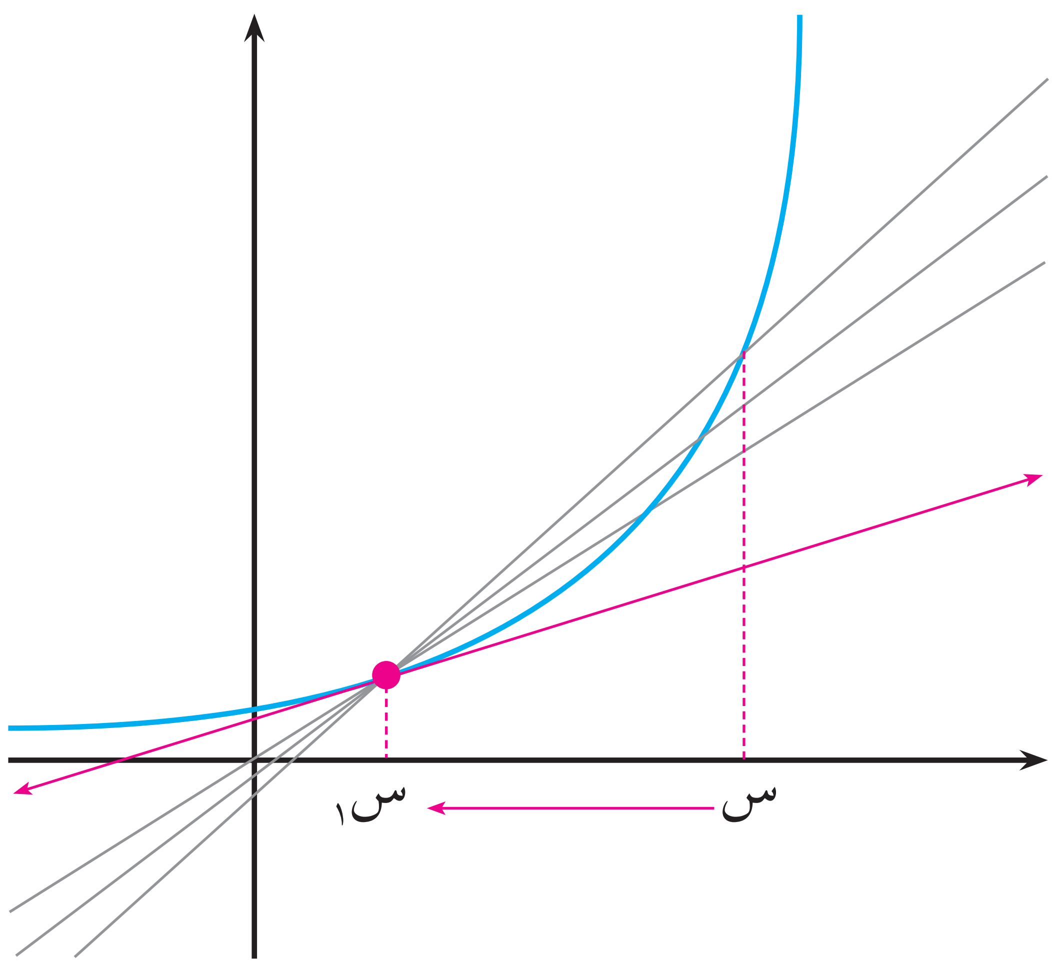
٣ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{٣} - \text{س}^{\text{٢}} & ، \quad -\text{٢} \leq \text{س} < \text{١} \\ \text{س} + \text{١} & ، \quad \text{١} < \text{س} \leq \text{٢} \end{cases}$

ابحث في اتصال الاقتران ق(س) على الفترة [−٢ ، ٢] .

الوحدة

3

حساب التفاضل



تمهيد:

بدأ علم التفاضل في القرن السابع عشر على يد كلٍ من العالمين نيوتن الانجليزي، ولايبنز الألماني، وذلك عند محاولتهما حل مسألتين أساسيتين: الأولى هندسيةٌ وتتعلق بالمماس لأي منحنى عند نقطة عليه، والثانية فيزيائية وتتعلق بالسرعة اللحظية لجسم متحرك. وقد أدت الفكرة المشتركة التي يقوم عليها حل المسألتين إلى مفهوم رياضي أشمل وأعم، ألا وهو المشتقة الأولى التي وجدت لها تطبيقات لاتكاد تحصر في جميع العلوم الهندسية، والفيزيائية، والاقتصادية، وفي كل مجال يكون التغير صفة مميزة له. ولتقديم مفهوم المشتقة يلزم التعرف أولاً على مفهوم متوسط التغير.

1-3 متوسط التغير (Average Rate of Change)

الاقتران علاقة بين متغيرين س، ص يسمى أحدهما (س) المتغير المستقل، ويسمى الآخر (ص) المتغير التابع؛ بحيث تتعين لكل قيمة من قيم المتغير س قيمة واحدة فقط للمتغير ص.

إذا كان ص = ق(س) اقتراناً، وتغير فيه س من $س_١$ الى $س_٢$،

فإن قيمة ص تتغير من $ص_١$ = ق($س_١$) الى $ص_٢$ = ق($س_٢$).

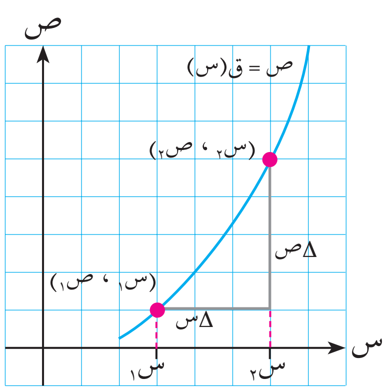
يرمز للتغير في س من $س_١$ إلى $س_٢$ بالرمز Δس (ويُقرأ: دلتا س)

أي أن: Δس = $س_٢ - س_١$

وبالمثل فإنه يرمز للتغير في ص بالرمز Δص (ويُقرأ: دلتا ص) أي أن:

Δص = Δ ق(س) = $ص_٢ - ص_١$ = ق($س_٢$) − ق($س_١$)

لاحظ الشكل (٢-١).



الشكل (٢-١)

مثال (١)

إذا كان ص = ق(س) = $س^٢$ +٣س−٥ ، فأوجد التغير في ص = ق(س) عندما تتغير س:

أ من $س_١$ = ١ إلى $س_٢$ = ٤

ب من $س_١$ = ٣ إلى $س_٢$ = −٥

جـ من $س_١$ = ٢ إلى $س_٢$ بحيث Δس = −٣

الحل:

أ Δص = ق(٤) − ق(١)

= ٢٣ − (−١) = ٢٤

ب Δص = ق(−٥) − ق(٣)

= ٥ − ١٣ = −٨

ج س$_{٢}$ = س$_{١}$ + Δس

= ٢ + −٣ = −١

⇐ Δص = ق(س$_{٢}$) − ق(س$_{١}$)

= ق(−١) − ق(٢)

= −٧ − ٥ = −١٢

تعريف: متوسط التغير

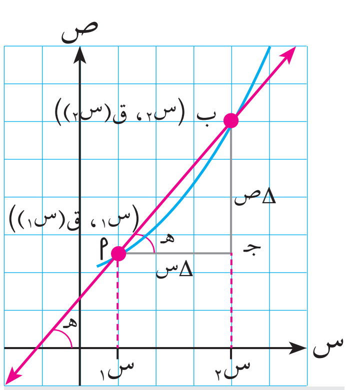
إذا كان ص = ق(س) اقتراناً، وتغير س من س$_{١}$ إلى س$_{٢}$ = س$_{١}$ + Δس، فإن متوسط تغير الاقتران بالنسبة لـ س يعرف بأنه النسبة بين التغير في ص إلى التغير في س، بشرط أن التغير في س لا يساوي صفراً.

أي أن متوسط التغير = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = $\frac{ق(س_{١}+\Delta س) - ق(س_{١})}{\Delta س}$ ، Δس ≠ ٠

فإذا كان ص = ق(س) هو الاقتران المبين في الشكل (٢-٢) فإن متوسط التغير في ق(س) بالنسبة لِ س بين س$_{١}$، س$_{٢}$ هو النسبة $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ ، ويمثلها ميل المستقيم أب القاطع لمنحنى الاقتران في النقطتين:

أ(س$_{١}$، ق(س$_{١}$))، ب (س$_{٢}$، ق(س$_{٢}$))

انظر الشكل (٢-٢).



الشكل (٢-٢)

مثال (٢)

إذا كان ق(س)=س^{٢}+س−٥ ، فأوجد متوسط التغير في ق(س) بالنسبة لـ س عندما تتغير س من ١ إلى ٤ .

الحل:

متوسط التغير = $\frac{ق(٤)-ق(١)}{٤-١}$

= $\frac{١٥-(-٣)}{٣}$ = ٦

مثال (٣)

ليكن $ق(س) = \begin{cases} ٣س+٤ & ، \quad س \le ٢ \\ س^٢+٣س & ، \quad س > ٢ \end{cases}$

أ أوجد متوسط تغير ق(س) في الحالات التالية:

١ عندما تتغير س من ٢ إلى ٥.

٢ عندما تتغير س من ٢ إلى −١

٣ عندما تتغير س من ٢ إلى ٢ + هـ

ب استخدم القاعدة التي توصلت إليها في قسم (٣) للتأكد من صحة جوابك في القسمين ١، ٢.

الحل:

أ ١ متوسط التغير $= \dfrac{ق(٥) - ق(٢)}{٥ - ٢}$

$= \dfrac{(٢٥+١٥) - (٦+٤)}{٣} = ١٠$

٢ متوسط التغير $= \dfrac{ق(-١) - ق(٢)}{-١-٢}$

$= \dfrac{(-٣+٤)-(٦+٤)}{-٣} = ٣$

٣ متوسط التغير $= \dfrac{ق(٢+هـ) - ق(٢)}{٢+هـ-٢} = \dfrac{ق(٢+هـ) - ١٠}{هـ}$

نعتبر حالتين:

أ عندما هـ > ٠ :

متوسط التغير $= \dfrac{(٢+هـ)^٢+٣(٢+هـ) -١٠}{هـ} = \dfrac{٤+٤هـ + هـ^٢+٦+٣هـ -١٠}{هـ}$

$= \dfrac{٧هـ+هـ^٢}{هـ} = \dfrac{هـ(٧+هـ)}{هـ} = ٧+ هـ \quad ، \quad هـ \ne ٠$

ب عندما هـ < ٠ :

متوسط التغير $= \dfrac{٣(٢+هـ) + ٤ -(١٠)}{هـ}$

$= \dfrac{٣هـ}{هـ} = ٣ \quad ، \quad هـ \ne ٠$

∴ متوسط التغير $\dfrac{\Delta ص}{\Delta س} = \begin{cases} ٧ + هـ & ، \quad هـ > ٠ \\ ٣ & ، \quad هـ < ٠ \end{cases}$

ب عندما تتغير س من ٢ إلى ٥ تكون هـ =٣ > ٠ ؛ ولذلك يكون متوسط التغير = ٧ + ٣ = ١٠

وعندما تتغير س من ٢ إلى −١ تكون هـ = −٣ < ٠ ؛ لذلك يكون متوسط التغير = ٣ .

إذن تتطابق النتيجتان مع الإجابتين في القسمين ١ ، ٢ .

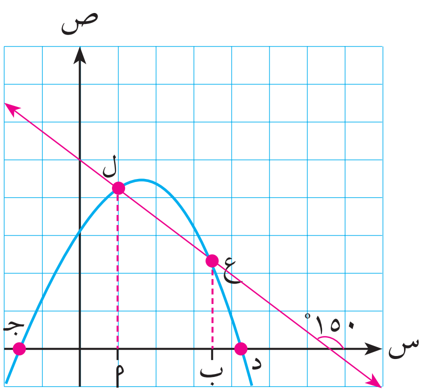
مثال (٤)

يمثل الشكل (٢−٣) منحنى الاقتران ص = ق(س)

جد متوسط التغير في ق(س):

أ بين س = م ، س = ب

ب بين س = جـ ، س = د



الشكل (٢−٣)

الحل:

أ متوسط التغير بين س = م ، س = ب

= ميل القاطع ل ع = ظا١٥٠° = $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$

ب متوسط التغير بين س = جـ ، س = د تساوي ميل القاطع جـ د = ميل محور السينات = صفر .

مثال (٥)

يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث إن بعده ف بالأمتار عن نقطة ثابته على الخط يعطى بالقاعدة ف = ق(ن) = ن^{٢}+٥ن ، ن بالثواني . جد متوسط التغير في ف بالنسبة للزمن في الفترة الزمنية [١ ، ٣] .

الحل:

متوسط التغير في ف بالنسبة لـ ن = $\frac{\Delta ف}{\Delta ن}$

= $\frac{ق(٣) - ق(١)}{٣-١}$

= $\frac{(٩+١٥)-(١+٥)}{٢}$ = $\frac{١٨}{٢}$ = ٩ م/ث

ملاحظة : يسمى متوسط التغير $\frac{\Delta ف}{\Delta ن}$ السرعة المتوسطة للجسم .

تمارين (3-1)

١ إذا كان ق(س)= $س^٢$ − س+٥ فأوجد قيمة التغير في الاقتران ق(س) :

أ عندما تتغير س من ١ إلى ٣ .

ب عندما تتغير س من ١ إلى ١+هـ.

جـ استخدم القاعدة التي توصلت إليها في الفرع (ب) للتأكد من صحة جوابك في الفرع (أ) .

٢ إذا كان هـ(س) = جاس−٣ جتاس ، فأوجد متوسط التغير في هـ(س) بين $س_١ = \frac{\pi}{٢}$ ، $س_٢ = ٣\pi$.

٣ إذا كان متوسط التغير في ق(س) = $\sqrt{٤س+١}$ بين س = ٢ ، س = ب مساوياً $\frac{١}{٣}$ ، فما قيمة ب؟

2-3 المشتقة الأولى (First Derivative)

سبق أن عرَّفنا متوسط التغير في الاقتران ص = ق(س)، عندما تتغير س من $س_١$ إلى $س_١+\Delta س$، بأنه :

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_١+\Delta س) - ق(س_١)}{\Delta س} ، \Delta س \neq ٠$$

وهذا مقدار تتوقف قيمته على $س_١$، $\Delta س$ فإذا بقيت $س_١$ ثابتة، وجعلنا $\Delta س$ تقترب من الصفر، فإن هذا المقدار قد تكون له نهاية معينة تسمى معدل تغير الاقتران أو المشتقة الأولى للاقتران عند س = $س_١$.

تعريف:

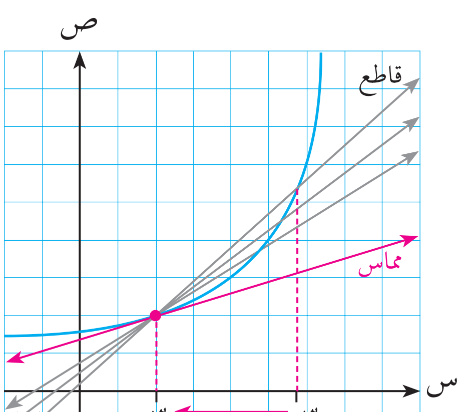
يعرف معدل تغير الاقتران أو المشتقة الأولى للاقتران ق(س) عند س = $س_١$ في مجاله، ونرمز له بالرمز $\acute{ق}(س_١)$، بأنه :

$$\acute{ق}(س_١) = \lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{ق(س_١+هـ) - ق(س_١)}{هـ}$$ ، بشرط وجود النهاية .

ويمكن كتابة معدل تغير الاقتران أو المشتقة الأولى على النحو التالي أيضا :

$$\acute{ق}(س_١) = \lim_{س \leftarrow س_١} \frac{ق(س) - ق(س_١)}{س - س_١}$$

ومن الناحية الهندسية نلاحظ من الشكل (٢-٤) أنه باقتراب س من $س_١$ يؤول متوسط التغير (ميل القاطع) إلى معدل التغير (ميل المماس) عند $س_١$.



الشكل (٢-٤)

مثال (١)

إذا كان ق(س)=س^{٢}+٣س−٢ فأوجد باستخدام التعريف قَ(٥).

الحل:

$$قَ(٥) = \lim_{هـ\to ٠} \frac{ق(٥+هـ) - ق(٥)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ\to ٠} \frac{\left((٥+هـ)^{٢}+٣(٥+هـ)-٢\right)-(٢٥+١٥-٢)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ\to ٠} \frac{٢٥+١٠هـ+هـ^{٢}+١٥+٣هـ-٢-٣٨}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ\to ٠} \frac{١٣هـ+هـ^{٢}}{هـ} = \lim_{هـ\to ٠} \frac{هـ(١٣+هـ)}{هـ} = ١٣$$

مثال (٢)

إذا كان ق(س) = $\sqrt{٢س-٣}$ فأوجد باستخدام التعريف قَ(٦).

الحل:

$$قَ(٦) = \lim_{س\to ٦} \frac{ق(س) - ق(٦)}{س - ٦}$$

$$= \lim_{س\to ٦} \frac{\sqrt{٢س-٣} - ٣}{س - ٦}$$

$$= \lim_{س\to ٦} \frac{\sqrt{٢س-٣} - ٣}{س - ٦} \times \frac{\sqrt{٢س-٣} + ٣}{\sqrt{٢س-٣} + ٣}$$

(بضرب كلٍ من البسط والمقام في مرافق البسط)

$$= \lim_{س\to ٦} \frac{٢س - ٣ - ٩}{(س-٦)(\sqrt{٢س-٣} + ٣)}$$

$$= \lim_{س\to ٦} \frac{٢(س - ٦)}{(س-٦)(\sqrt{٢س-٣} + ٣)}$$

$$= \lim_{س\to ٦} \frac{٢}{\sqrt{٢س-٣} + ٣} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$$

ملاحظة:

إذا كان ص = ق(س) فإن المشتقة الأولى للاقتران ق(س) عند س = أ ، أي قَ(أ)، يرمز لها أيضاً بأحد الرموز التالية :

$$\frac{د}{د س}\left(ق(س)\right)\Big|_{س = أ} \quad ، \quad \frac{د ص}{د س}\Big|_{س = أ} \quad ، \quad صَ \text{ عند } س = أ$$

مثال (٣)

إذا كانت ص= ق(س) = $\frac{٢س+٣}{٣س-١}$ ، فأوجد باستخدام التعريف $\frac{د ص}{د س}\Big|_{س = ٤}$.

الحل:

$$\frac{د ص}{د س}\Big|_{س = ٤} = \lim_{س \leftarrow ٤} \frac{ق(س) - ق(٤)}{س - ٤}$$

$$= \lim_{س \leftarrow ٤} \frac{\frac{٢س + ٣}{٣س - ١} - ١}{س - ٤}$$

$$= \lim_{س \leftarrow ٤} \frac{\left(\frac{٢س+٣-٣س+١}{٣س - ١}\right)}{س - ٤}$$

$$= \lim_{س \leftarrow ٤} \frac{-(س - ٤)}{٣س - ١} \times \frac{١}{س - ٤} = -\frac{١}{١١}$$

المشتقة من اليمين ومن اليسار:

مثلما عرَّفنا النهاية من اليمين والنهاية من اليسار ، نعرِّف المشتقة من اليمين (المشتقة اليمنى) للاقتران ص = ق(س) عند س = أ الواقعة في مجاله ، ويرمز لها بالرمز $قَ(أ)^{+}$ بأنها :

$$قَ(أ)^{+} = \lim_{هـ \leftarrow ٠^{+}} \frac{ق(أ+هـ) - ق(أ)}{هـ} \quad \text{أو بصورة مكافئة} \quad قَ(أ)^{+} = \lim_{س \leftarrow أ^{+}} \frac{ق(س) - ق(أ)}{س - أ}$$

وبالمثل تعرف المشتقة من اليسار (المشتقة اليسرى) للاقتران ص = ق(س) عند س = أ في مجاله ، ويرمز لها بالرمز $قَ(أ)^{-}$ بأنها : $قَ(أ)^{-} = \lim_{هـ \leftarrow ٠^{-}} \frac{ق(أ+هـ) - ق(أ)}{هـ}$ أو بصورة مكافئة $قَ(أ)^{-} = \lim_{س \leftarrow أ^{-}} \frac{ق(س) - ق(أ)}{س - أ}$

ويكون الاقتران ق(س) قابلاً للاشتقاق عند س = أ إذا وفقط إذا كانت $قَ(أ)^{+} = قَ(أ)^{-}$.

أمّا الاقتران ق(س) المعرف على الفترة المغلقة [أ ، ب] فلا يكون قابلاً للاشتقاق عند الطرفين أ ، ب .

مثال (٤)

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} + ٥\text{س} & ، \quad \text{س} \leq ١ \\ ٤\text{س} + ٢ & ، \quad \text{س} > ١ \end{cases}$

فأوجد باستخدام التعريف : **أ** قَ(٢)   **ب** قَ(١)

الحل:

أ بما أن ق(س) = ٤س + ٢ لجميع قيم س في جوار العدد ٢ ،

$$\therefore \quad \text{قَ}(٢) = \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق(س)} - \text{ق}(٢)}{\text{س} - ٢}$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{(٤\text{س} + ٢) - (٨ + ٢)}{\text{س} - ٢}$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{٤\text{س} - ٨}{\text{س} - ٢}$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{٤(\text{س} - ٢)}{\text{س} - ٢} = \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} ٤$$

$$= ٤$$

ب $$\text{قَ}(١) = \underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق(س)} - \text{ق}(١)}{\text{س} - ١}$$

بما أن قاعدة الاقتران ق(س) تتغير في جوار س = ١

فإننا نلجأ إلى حساب المشتقة اليمنى واليسرى عند س = ١

أولاً : $$\text{قَ}(١)^{-} = \underset{\text{س} \leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق(س)} - \text{ق}(١)}{\text{س} - ١} = \underset{\text{س} \leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢} + ٥\text{س} - ٦}{\text{س} - ١}$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} - ١)(\text{س} + ٦)}{\text{س} - ١} = ٧$$

ثانياً : $$\text{قَ}(١)^{+} = \underset{\text{س} \leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق(س)} - \text{ق}(١)}{\text{س} - ١}$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}} \frac{(٤\text{س} + ٢) - (١ + ٥)}{\text{س} - ١} = \underset{\text{س} \leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}} \frac{٤\text{س} - ٤}{\text{س} - ١}$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}} \frac{٤(\text{س} - ١)}{\text{س} - ١} = ٤$$

وبما أن قَ$(١)^{-} \neq$ قَ$(١)^{+}$ إذن قَ(١) غير موجودة .نقول في مثل هذه الحالة إن الاقتران ق(س) غير قابل للاشتقاق عند س = ١ .

الاقتران المشتق (اقتران المشتقة الأولى):

درسنا في الأمثلة السابقة كيفية ايجاد مشتقة الاقتران ق(س) عند نقطة محددة س = أ في مجاله . وفيما يلي سنبحث في مشتقة الاقتران ق(س) عند كل نقطة س في مجاله ، لنحصل على اقتران آخر يسمى الاقتران المشتق قَ(س) .

تعريف:

يعرف الاقتران المشتق قَ(س) للاقتران ق(س) بأنه :

$$\text{قَ(س)} = \underset{\text{هـ} \leftarrow \cdot}{\text{نهـــا}} \frac{\text{ق(س+هـ)} - \text{ق(س)}}{\text{هـ}}$$

أو : $\text{قَ(س)} = \underset{\text{ع} \leftarrow \text{س}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}}{\text{ع} - \text{س}}$ ، بشرط وجود النهاية .

يلاحظ من التعريف أن مجال قَ(س) يكون دائماً مجموعة جزئية من مجال ق(س) .

مثال (٥)

إذا كان ق(س) = س^{٢} + ٣س – ٥ ، فأوجد قَ(س) .

الحل:

$$\text{قَ(س)} = \underset{\text{ع} \leftarrow \text{س}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع} \leftarrow \text{س}}{\text{نهـــا}} \frac{(\text{ع}^{٢} + ٣\text{ع} - ٥) - (\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ٥)}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع} \leftarrow \text{س}}{\text{نهـــا}} \frac{(\text{ع}^{٢} - \text{س}^{٢}) + (٣\text{ع} - ٣\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع} \leftarrow \text{س}}{\text{نهـــا}} \frac{(\text{ع} - \text{س})(\text{ع} + \text{س}) + ٣(\text{ع} - \text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع} \leftarrow \text{س}}{\text{نهـــا}} \frac{(\text{ع} - \text{س})(\text{ع} + \text{س} + ٣)}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع} \leftarrow \text{س}}{\text{نهـــا}} (\text{ع} + \text{س} + ٣)$$

$$= \text{س} + \text{س} + ٣ = ٢\text{س} + ٣$$

أي أن $\text{قَ(س)} = ٢\text{س} + ٣$

مثال (٦)

إذا كان ق(س) = $\sqrt{س}$ ، س ≥ ٠ ، فأوجد قَ(س) وعين مجاله .

الحل:

$$قَ(س) = \lim_{ع \leftarrow س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \leftarrow س} \frac{\sqrt{ع} - \sqrt{س}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \leftarrow س} \left(\frac{\sqrt{ع} - \sqrt{س}}{ع - س}\right) \times \frac{\sqrt{ع} + \sqrt{س}}{\sqrt{ع} + \sqrt{س}}$$

$$= \lim_{ع \leftarrow س} \frac{(ع - س)}{(ع - س)\left(\sqrt{ع} + \sqrt{س}\right)}$$

$$= \lim_{ع \leftarrow س} \frac{١}{\sqrt{ع} + \sqrt{س}} = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$$

$$\therefore \quad قَ(س) = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$$

مجال قَ(س) هو جميع الأعداد الحقيقية الموجبة .

مثال (٧)

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} & ، \ -١ \le س < ١ \\ ٣س - ٢ & ، \ ١ \le س \le ٣ \end{cases}$ ، أوجد قَ(س) .

الحل:

أولاً : الاشتقاق على الفترة المفتوحة]-١ ، ١[:

∀ س ∈]-١ ، ١[، يكون :

$$قَ(س) = \lim_{ع \leftarrow س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} = \lim_{ع \leftarrow س} \frac{ع^{٢} - س^{٢}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \leftarrow س} \frac{(ع - س)(ع + س)}{ع - س} = \lim_{ع \leftarrow س} (ع + س) = ٢س$$

ثانياً: الاشتقاق على الفترة المفتوحة]١،٣[:

∀ س ∈]١،٣[، يكون:

$$\text{قَ(س)} = \underset{\text{ع} \leftarrow \text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع} \leftarrow \text{س}}{\text{نهـا}} \frac{(\text{٣ع} - ٢) - (\text{٣س} - ٢)}{\text{ع} - \text{س}} = \underset{\text{ع} \leftarrow \text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{٣ع} - \text{٣س}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع} \leftarrow \text{س}}{\text{نهـا}} \frac{٣(\text{ع} - \text{س})}{\text{ع} - \text{س}} = ٣$$

ثالثاً: الاشتقاق عند نقطة تغير تعريف الاقتران حيث س = ١

$$\text{قَ}(١)^{+} = \underset{\text{س} \leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق(س)} - \text{ق}(١)}{\text{س} - ١}$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}} \frac{(\text{٣س} - ٢) - (٣ \times ١ - ٢)}{\text{س} - ١}$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\text{٣س} - ٣}{\text{س} - ١} = \underset{\text{س} \leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}} ٣ = ٣$$

$$\text{قَ}(١)^{-} = \underset{\text{س} \leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق(س)} - \text{ق}(١)}{\text{س} - ١}$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢} - (٣ \times ١ - ٢)}{\text{س} - ١}$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س} - ١} = \underset{\text{س} \leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}} (\text{س} + ١) = ٢$$

وبما أن $\text{قَ}(١)^{+} \neq \text{قَ}(١)^{-}$

∴ قَ(١) غير موجودة.

رابعاً: قَ(-١) غير موجودة، وكذلك قَ(٣) غير موجودة؛ لأن س = -١ ، س = ٣ هما نقطتان طرفيتان

$$\therefore \text{قَ(س)} = \begin{cases} \text{٢س} & ، -١ < \text{س} < ١ \\ ٣ & ، ١ < \text{س} < ٣ \\ \text{غير موجودة} & ، \text{س} = -١ ، ١ ، ٣ \end{cases}$$

مثال (٨)

اذا كانت $\acute{ق}(٣) = ١٢$ ، فأوجد $\lim\limits_{هـ \leftarrow ٠} \frac{ق(٣+٥هـ) - ق(٣)}{٣هـ}$

الحل:

نفرض أن ٥ هـ = و فتكون $هـ = \frac{و}{٥}$ ، وعندما هـ ← ٠ فإن و ← ٠

$$\therefore \lim\limits_{هـ \leftarrow ٠} \frac{ق(٣+٥هـ) - ق(٣)}{٣هـ} = \lim\limits_{و \leftarrow ٠} \frac{ق(٣+و) - ق(٣)}{٣ \times \frac{و}{٥}}$$

$$= \frac{٥}{٣} \lim\limits_{و \leftarrow ٠} \frac{ق(٣+و) - ق(٣)}{و}$$

$$= \frac{٥}{٣} \times \acute{ق}(٣) = \frac{٥}{٣} \times ١٢ = ٢٠$$

مثال (٩)

إذا علمت أن $\acute{ق}(٤) = ٧$، $\acute{ق}(١٢) = ٥$ فأوجد $\lim\limits_{س \leftarrow ٤} \frac{ق(٣س) - ق(١٢)}{س - ٤}$

الحل:

نفرض أن ٣س = ع فتكون $س = \frac{ع}{٣}$ ، وعندما س ← ٤ فإن ع ← ١٢

$$\therefore \lim\limits_{س \leftarrow ٤} \frac{ق(٣س) - ق(١٢)}{س - ٤} = \lim\limits_{ع \leftarrow ١٢} \frac{ق(ع) - ق(١٢)}{\frac{ع}{٣} - ٤}$$

$$= ٣ \times \lim\limits_{ع \leftarrow ١٢} \frac{ق(ع) - ق(١٢)}{ع - ١٢}$$

$$= ٣ \times \acute{ق}(١٢)$$

$$= ٣ \times ٥ = ١٥$$

تمارين (2-3)

١ إذا كانت ص = ق(س) وكانت Δص الناتجة عن تغير س من ٢ إلى ٢+Δس معطاة بالعلاقة :

Δص = ٦Δس + ٢(Δس)^{٢} فأوجد :

أ $\frac{دص}{دس}$ عند س = ٢ .

ب متوسط التغير في الاقتران عندما تتغير س من ٢ إلى ٥ .

٢ باستخدام تعريف المشتقة ، جد مشتقة كل من الاقترانات الآتية (إن وجدت) عند النقطة المذكورة إزاء كل منها :

أ ق(س) = س^{٢}–٥س+٣ ، س = ٢

ب ق(س) = س + $\frac{٢}{س}$ ، س = ١

جـ ص=|٢س–٨| ، س = ٤

د ل(س) = $\begin{cases} س^{٢}+٤س ، & س \leq ١ \\ ٨س - ٣ ، & س > ١ \end{cases}$ ، س= ١

٣ إذا كان ق(س) = $\sqrt{٥+٣س}$ فأوجد باستخدام التعريف قَ(س) ثم عين مجالها .

٤ إذا كانت قَ(٥) = ٣ فأوجد $\lim\limits_{س \leftarrow ٤} \frac{ق(٣س - ٧) - ق(٥)}{٢س - ٨}$.

3-3 قواعد الاشتقاق (Rules of Differentiation)

كنا نستخدم سابقاً تعريف المشتقة في ايجاد المشتقة الأولى لاقتران ما، ولتسهيل الحصول على هذه المشتقة يمكننا استخدام القواعد التالية:

قاعدة (١):

إذا كان ق(س) = جـ ، حيث جـ ثابت، فإن $ق'(س) = ٠ \quad \forall س \in ح$

البرهان:

$$ق'(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{جـ - جـ}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٠}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} ٠ = ٠$$

مثال (١)

إذا كان $ق(س) = \sqrt{١٥}$ فأوجد $ق'(س)$ ، $ق'(٣)$.

الحل:

$ق'(س) = ٠$ لجميع قيم $س \in ح$

$\therefore \quad ق'(٣) = ٠$

قاعدة (٢):

إذا كان $ق(س) = س^{ن}$ ، $ن \in ط^*$ فإن $ق'(س) = ن س^{ن-١}$

البرهان:

$$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ع^{ن} - س^{ن}}{ع - س}$$

$= ن س^{ن-١}$ (انظر التعميم صفحة ٢٠)

مثال (٢)

إذا كان ق(س) = $س^{٥}$ ، فأوجد ق َ(س) ، ق َ(−٢) .

الحل:

ق َ(س) = ٥ $س^{٤}$ ، لجميع قيم س ∈ ح

∴ ق َ(−٢) = ٥ × $(−٢)^{٤}$ = ٨٠

قاعدة (٣):

إذا كان كل من ق(س) ، هـ(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند س ، وكانت جـ ∈ ح فإن :

١ ك(س) = جـ × ق(س) قابل للاشتقاق عند س ، ويكون ك َ(س) = جـ × ق َ(س) .

٢ ع(س) = ق(س) + هـ(س) قابل للاشتقاق عند س ، ويكون ع َ(س) = ق َ(س) + هـ َ(س) .

٣ ل(س) = ق(س) − هـ(س) قابل للاشتقاق عند س ، ويكون ل َ(س)= ق َ(س) − هـ َ(س) .

البرهان:

١ $$\text{ك}َ(\text{س}) = \lim_{\text{و} \to ٠} \frac{\text{ك}(\text{س} + \text{و}) - \text{ك}(\text{س})}{\text{و}}$$

$$= \lim_{\text{و} \to ٠} \frac{\text{جـ ق}(\text{س} + \text{و}) - \text{جـ ق}(\text{س})}{\text{و}}$$

$$= \text{جـ} \lim_{\text{و} \to ٠} \frac{\text{ق}(\text{س} + \text{و}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{و}} = \text{جـ ق}َ(\text{س}) .$$

٢ $$\text{ع}َ(\text{س}) = \lim_{\text{و} \to ٠} \frac{\text{ع}(\text{س} + \text{و}) - \text{ع}(\text{س})}{\text{و}}$$

$$= \lim_{\text{و} \to ٠} \frac{(\text{ق}(\text{س} + \text{و}) + \text{هـ}(\text{س} + \text{و})) - (\text{ق}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س}))}{\text{و}}$$

$$= \lim_{\text{و} \to ٠} \frac{(\text{ق}(\text{س} + \text{و}) - \text{ق}(\text{س})) + (\text{هـ}(\text{س} + \text{و}) - \text{هـ}(\text{س}))}{\text{و}}$$

$$= \lim_{\text{و} \to ٠} \frac{\text{ق}(\text{س} + \text{و}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{و}} + \lim_{\text{و} \to ٠} \frac{\text{هـ}(\text{س} + \text{و}) - \text{هـ}(\text{س})}{\text{و}}$$

= ق َ(س) + هـ َ(س) وهو المطلوب .

٣ يترك البرهان للطالب .

مثال (٣)

إذا كان ق(س) = ٥س^{٣} + س^{٢} فأوجد قَ(٢) .

الحل:

قَ(س) = ٥ × ٣س^{٢} + ٢س = ١٥س^{٢} + ٢س

∴ قَ(٢) = ١٥ × (٢)^{٢} + ٢ × ٢ = ٦٤

تعميم:

يمكن تعميم قاعدة (٣) لتشمل أكثر من اقترانين قابلين للاشتقاق أي أنه :

إذا كانت ق$_{١}$(س) ، ق$_{٢}$(س)، . . . ، ق$_{ن}$(س) اقترانا قابلة للاشتقاق عند س ،

وكانت جـ$_{١}$، جـ$_{٢}$، . . . ، جـ$_{ن}$ ∈ ح فإن :

(جـ$_{١}$ ق$_{١}$(س) ∓ جـ$_{٢}$ ق$_{٢}$(س) ∓ . . . ∓ جـ$_{ن}$ ق$_{ن}$(س))َ = جـ$_{١}$ قَ$_{١}$(س) ∓ جـ$_{٢}$ قَ$_{٢}$(س) ∓ . . . ∓ جـ$_{ن}$ قَ$_{ن}$(س) .

وبوجهٍ خاص :

إذا كان ق(س) = أ$_{ن}$س^{ن} + أ$_{ن-١}$س$^{ن-١}$ + . . . + أ$_{١}$س + أ$_{٠}$ اقتراناً كثير حدود، فإن ق(س) قابل للاشتقاق ∀ س ∈ ح ، ويكون قَ(س) = أ$_{ن}$ × ن س$^{ن-١}$ + أ$_{ن-١}$ × (ن - ١) س$^{ن-٢}$ + . . . + أ$_{١}$

مثال (٤)

إذا كان هـ(س) = ٢س^{٤} - ٣س^{٣} + ٤س^{٢} - ٥س + ١١ فأوجد هـَ(س) .

الحل:

هـَ(س) = ٨س^{٣} - ٩س^{٢} + ٨س - ٥

مثال (٥)

إذا كان ق(س) = س^{٢}+٣س ، وكان ل(س) = ق(س)+٣هـ(س)، هـ(٢) = ٥ ، هـَ(٢) = ١

فأوجد لَ(٢) .

الحل:

لَ(س) = قَ(س) + ٣هـَ(س)

= (٢س + ٣) + ٣هـَ(س)

⇐ لَ(٢) = (٢ × ٢ + ٣) + ٣هـَ(٢)

= ٧ + ٣ × ١ = ١٠

قاعدة (٤):

مشتقة حاصل ضرب اقترانين:

إذا كان كلٌّ من ق(س)، هـ(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند س، وكان ل(س) = ق(س) x هـ(س) فإن:

ل(س) قابل للاشتقاق عند س، ويكون لَ(س) = ق(س) x هـَ(س) + هـ(س) x قَ(س).

البرهان:

$$\text{لَ(س)} = \underset{\text{و} \leftarrow \cdot}{\text{نهـا}} \frac{\text{ل(س + و) – ل(س)}}{\text{و}}$$

$$= \underset{\text{و} \leftarrow \cdot}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق(س + و) x هـ(س + و) – ق(س) x هـ(س)}}{\text{و}}$$

$$= \underset{\text{و} \leftarrow \cdot}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق(س + و) هـ(س + و) – ق(س + و) هـ(س) + ق(س + و) هـ(س) – ق(س) هـ(س)}}{\text{و}}$$

(باضافة وطرح المقدار ق(س + و) هـ(س) في البسط)

$$= \underset{\text{و} \leftarrow \cdot}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق(س + و)}\Big(\text{هـ(س + و) – هـ(س)}\Big) + \text{هـ(س)}\Big(\text{ق(س + و) – ق(س)}\Big)}{\text{و}}$$

$$= \underset{\text{و} \leftarrow \cdot}{\text{نهـا}} \text{ق(س + و)} \frac{\text{هـ(س + و) – هـ(س)}}{\text{و}} + \underset{\text{و} \leftarrow \cdot}{\text{نهـا}} \text{هـ(س)} \frac{\text{ق(س + و) – ق(س)}}{\text{و}}$$

= ق(س) x هـَ(س) + هـ(س) x قَ(س) وهو المطلوب.

أي أن مشتقة حاصل ضرب اقترانين قابلين للاشتقاق = الأول x مشتقة الثاني + الثاني x مشتقة الأول

مثال (٦)

إذا كانت ص = (س^{٢}+٥س–١)(٣س+٤)، فأوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$.

الحل:

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = (س^{٢}+٥س–١) x ٣ + (٣س+٤) (٢س+٥)

= ٣س^{٢}+١٥س–٣ + ٦س^{٢}+٢٣س+٢٠

= ٩س^{٢}+٣٨س+١٧

لاحظ أنه بالضرب المباشر تكون $ص = ٣س^{٣}+١٩س^{٢}+١٧س-٤$

ومنها $\frac{د ص}{د س} = ٩س^{٢}+٣٨س+١٧$ لاحظ تطابق النتيجتين .

مثال (٧)

إذا كان $ق(س) = (س^{٣}+٢س^{٢}-٤س+١)(٢س^{٣}-س^{٢}+س-٣)$ فأوجد $قَ(١)$.

الحل:

$قَ(س) = (س^{٣}+٢س^{٢}-٤س+١)(٦س^{٢}-٢س+١)+(٢س^{٣}-س^{٢}+س-٣)(٣س^{٢}+٤س-٤)$

وبتعويض س = ١ نحصل على :

$قَ(١) = صفر \times ٥ + -١ \times ٣ = -٣$

مثال (٨)

إذا كان $ق(س)=(س^{٢}+٥س-١١)\times هـ(س)$ ، فأوجد $قَ(٢)$ علماً بأن $هـَ(٢) = ٥$ ، $هـ(٢) = ٤$.

الحل:

$قَ(س) = (س^{٢}+٥س-١١)\times هـَ(س) + هـ(س) \times (٢س+٥)$

$\Leftarrow$ $قَ(٢) = ٣ \times هـَ(٢) + هـ(٢) \times ٩$

بالتعويض ينتج :

$قَ(٢) = ٣ \times ٥ + ٤ \times ٩ = ٥١$

قاعدة (٥): مشتقة مقلوب اقتران:

إذا كان $ل(س) = \frac{١}{ق(س)}$ ، $ق(س) \neq ٠$ ، وكان ق(س) قابلاً للاشتقاق عند س فإن :

ل(س) قابل للاشتقاق عند س ويكون $لَ(س) = \frac{-قَ(س)}{(ق(س))^{٢}}$

البرهان:

$$لَ(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ل(س+هـ) - ل(س)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{١}{هـ}\left(\frac{١}{ق(س+هـ)} - \frac{١}{ق(س)}\right) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{١}{هـ}\left(\frac{ق(س) - ق(س+هـ)}{ق(س+هـ)\,ق(س)}\right)$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \left(\frac{-1\left(ق(س+هـ)-ق(س)\right)}{هـ} \times \frac{1}{ق(س+هـ)ق(س)} \right)$$

$$= -1 \lim_{هـ \to 0} \frac{\left(ق(س+هـ)-ق(س)\right)}{هـ} \times \lim_{هـ \to 0} \frac{1}{ق(س+هـ)ق(س)}$$

$$= -1 \times قَ(س) \times \frac{1}{(ق(س))^2} = \frac{-قَ(س)}{(ق(س))^2}$$

قاعدة (٦): مشتقة ناتج قسمة اقترانين:

إذا كان كل من ق(س)، هـ(س) قابلاً للاشتقاق عند س، هـ(س) ≠ ٠ فإن:

ل(س) = $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ قابل للاشتقاق عند س ويكون لَ(س) = $\frac{هـ(س)قَ(س) - ق(س)هـَ(س)}{(هـ(س))^2}$

البرهان:

ل(س) = $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ = ق(س) × $\frac{1}{هـ(س)}$ ، هـ(س) ≠ ٠

وبما أن ق(س)، $\frac{1}{هـ(س)}$ قابلان للاشتقاق عند س

∴ حاصل الضرب وهو الاقتران ل(س) قابل للاشتقاق عند س ويكون:

$$لَ(س) = ق(س) \times \frac{-هـَ(س)}{(هـ(س))^2} + قَ(س) \times \frac{1}{هـ(س)}$$

$$= \frac{-ق(س)\ هـَ(س)}{(هـ(س))^2} + \frac{قَ(س)}{هـ(س)}$$

$$= \frac{-ق(س) \times هـَ(س) + قَ(س) \times هـ(س)}{(هـ(س))^2} = \frac{هـ(س) \times قَ(س) - ق(س) \times هـَ(س)}{(هـ(س))^2}$$

أي أن مشتقة ناتج قسمة اقترانين قابلين للاشتقاق = $\frac{\text{المقام × مشتقة البسط − البسط × مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$

مثال (٩)

إذا كان ق(س) = $\frac{٣س + ١}{٢س - ٥}$ ، س ≠ $\frac{٥}{٢}$ ، فأوجد قَ(س).

الحل:

قَ(س) = $\frac{(٢س - ٥) \times ٣ - (٣س + ١) \times ٢}{(٢س - ٥)^2}$ = $\frac{-١٧}{(٢س - ٥)^2}$ ، س ≠ $\frac{٥}{٢}$

مثال (١٠)

إذا كان هـ(س) = $\frac{ق(س)}{٥س + ٦}$ ، س ≠ $\frac{-٦}{٥}$ ، فأوجد هـَ(٣) علماً بأن :

ق(٣) = ١٥ ، قَ(٣) = $\frac{١}{٧}$

الحل:

هـَ(س) = $\frac{(٥س + ٦) \times قَ(س) - ق(س) \times ٥}{(٥س + ٦)^{٢}}$

⇐ هـَ(٣) = $\frac{٢١ قَ(٣) - ق(٣) \times ٥}{(٢١)^{٢}}$ .... (١)

بالتعويض في (١) ينتج أن :

هـَ(٣) = $\frac{٢١ \times \frac{١}{٧} - ١٥ \times ٥}{(٢١)^{٢}}$ = $\frac{-٧٢}{٤٤١}$ = $\frac{-٨}{٤٩}$

نتيجة:

إذا كانت ص = س$^{-ن}$: ن ∈ ط* فإن : $\frac{د ص}{د س}$ = −ن س$^{-ن-١}$

أي أن قاعدة الاشتقاق في حالة الأسس الصحيحة الموجبة تنطبق أيضاً في حالة الأسس الصحيحة السالبة .

البرهان:

ص = س$^{-ن}$ = $\frac{١}{س^{ن}}$ ، ن ∈ ط*

$\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{-ن س^{ن-١}}{س^{٢ن}}$ = −ن س$^{ن-١-٢ن}$ = −ن س$^{-ن-١}$

مثال (١١)

إذا كان ق(س) = س$^{-٣}$ فأوجد قَ(٢) .

الحل:

قَ(س) = −٣س$^{-٤}$ = $\frac{-٣}{س^{٤}}$

⇐ قَ(٢) = $\frac{-٣}{٢^{٤}}$ = $\frac{-٣}{١٦}$

مثال (١٢)

إذا كان ق(س) = $\frac{٥}{٢س}$ + $\frac{٤}{س^{٢}}$ ، س ≠ ٠ فأوجد قَ(س) .

الحل:

ق(س) = $\frac{٥}{٢}$ س$^{-١}$ + ٤ س$^{-٢}$ ، س ≠ ٠

⇐ قَ(س) = $\frac{٥}{٢}$ × −١ س$^{-٢}$ + ٤ × −٢ س$^{-٣}$

= $\frac{-٥}{٢}$ × $\frac{١}{س^{٢}}$ − ٨ × $\frac{١}{س^{٣}}$

= $\frac{-٥}{٢س^{٢}}$ − $\frac{٨}{س^{٣}}$

المشتقات العليا:

إذا كان ص = ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق، فإن المشتقة قَ(س) تمثل اقتراناً آخر يسمى الاقتران المشتق للاقتران ق(س) أو المشتقة الأولى للاقتران ق(س). والمشتقة الأولى للاقتران المشتق أي $\frac{د}{د س}\left(\frac{د ص}{د س}\right)$ تسمى المشتقة الثانية للاقتران ق(س)، ويرمز لها بالرمز $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$ (وتقرأ دال اثنين ص دال س تربيع)، أو قً(س). وبالمثل يرمز للمشتقة الثالثة للاقتران ق(س) بالرمز $\frac{د}{د س}\left(\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}\right)$ أو $\frac{د^{٣}ص}{د س^{٣}}$ أو ق$^{(٣)}$(س).

وبوجه عام، فإننا نعرف المشتقة النونية للاقتران ص = ق(س)، والتي يرمز لها بالرمز ق$^{(ن)}$ (س) أو $\frac{د^{ن}ص}{د س^{ن}}$ بأنها $\frac{د}{د س}\left(\frac{د^{ن-١}ص}{د س^{ن-١}}\right)$.

مثال (١٣)

جد المشتقة الأولى والثانية والثالثة للاقتران ص = س^{٤} − ٢س^{٣} + ٥س + ٢ .

الحل:

$\frac{د ص}{د س}$ = ٤س^{٣} − ٦س^{٢} + ٥

$\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$ = $\frac{د}{د س}$ (٤س^{٣}−٦س^{٢}+٥) = ١٢س^{٢}−١٢س

$\frac{د^{٣}ص}{د س^{٣}}$ = $\frac{د}{د س}$ (١٢س^{٢} − ١٢س) = ٢٤س − ١٢

تمارين (3-3)

١ جد مشتقة كل من الاقترانات التالية :

أ ق(س) = س^{٣} − ٢س^{٢} + ٥س − ٣

ب جـ(س) = (٣س+٢) (س^{٢}+٤)

جـ ص = $\frac{٢}{٣}$ س^{٣} − ٤س^{٢} + ٥س + ٣

د ف = $\frac{٥}{٤}$ ن^{٤} − $\frac{ن^{٣}}{٣}$ + ٦ن − $\sqrt{٧}$

هـ ق(س) = ٢س(س^{٢} − ٣س + ٨)

و هـ(س) = $\frac{٢س + ٥}{٣س − ١}$

ز ل(س) = (س+١) (٢س+١) (٣س+٥)

ح م(س) = (٣س+٢) × $\frac{س − ٣}{٢س − ١}$

٣ إذا كان ق(س) = أس^{٢} + ب س + ٢ وكان ق(١) = قَ(١) = ٧ ، فأوجد الثابتين أ ، ب .

٤ إذا كان قَ(١) = ٣ ، ق(١) = ٢ ، وكان م(س) = س ق(س) فأوجد مَ(١) .

٥ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٢س & ، \quad س \leq ١ \\ ٢س + ١ & ، \quad س > ١ \end{cases}$ ، فأجد قَ(س) .

4-3 الاتصال وقابلية الاشتقاق (Continuity and Differentiability)

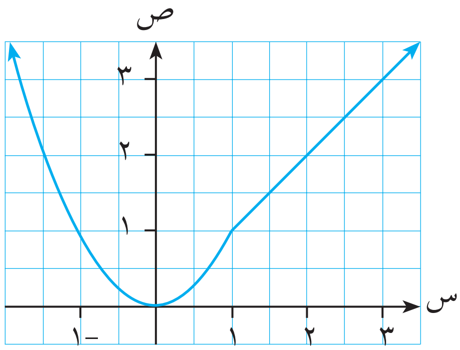
مر معنا مفهوما الاتصال والاشتقاق كل على حدة، فهل من علاقة تربط بين المفهومين؟ لندرس المثال التالي:

مثال (١)

الشكل (٢-٥) يمثل منحنى الاقتران:

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} & ، \quad س \leq ١ \\ س & ، \quad س > ١ \end{cases}$$

ادرس قابلية الاقتران للاشتقاق عند س = ٠ ، ١



الشكل (٢-٥)

الحل:

أ عند س = ٠

في جوار س = ٠ ، ق(س) = س^{٢}

∴ قَ(س) = ٢س

∴ قَ(٠) = ٠

ب عند س = ١ :

عند س = ١ يغير الاقتران ق(س) تعريفه، وفي هذه الحالة تلزم دراسة المشتقتين اليمنى واليسرى:

١ $قَ(١)^{+} = \lim\limits_{هـ \leftarrow ٠^{+}} \dfrac{ق(١ + هـ) - ق(١)}{هـ}$

$= \lim\limits_{هـ \leftarrow ٠^{+}} \dfrac{(١ + هـ) - ١^{٢}}{هـ}$

$= \lim\limits_{هـ \leftarrow ٠^{+}} \dfrac{هـ}{هـ} = \lim\limits_{هـ \leftarrow ٠^{+}} ١ = ١$

٢ $قَ(١)^{-} = \lim\limits_{هـ \leftarrow ٠^{-}} \dfrac{ق(١ + هـ) - ق(١)}{هـ}$

$= \lim\limits_{هـ \leftarrow ٠^{-}} \dfrac{(١ + هـ)^{٢} - ١^{٢}}{هـ}$

$= \lim\limits_{هـ \leftarrow ٠^{-}} \dfrac{٢هـ + هـ^{٢}}{هـ} = \lim\limits_{هـ \leftarrow ٠^{-}} (٢ + هـ) = ٢$

وبما أن $قَ(١)^{+} \neq قَ(١)^{-}$

∴ ق(س) غير قابل للاشتقاق عند س = ١

لاحظ أن الاقتران ق(س) متصل عند س = ٠ وقابل للاشتقاق عندها، وأنه متصل عند س = ١ ولكنه غير قابل للاشتقاق عندها، أي أن اتصال الاقتران عند نقطة لا يعني بالضرورة قابليته للاشتقاق عندها.

ولكن ماذا عن العكس؟ هل قابلية الاشتقاق عند نقطة تتضمن الاتصال عند تلك النقطة؟

النظرية التالية تجيب عن هذا التساؤل.

نظرية:

أذا كان الاقتران ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند س = $س_١$ فإن الاقتران ق(س) يكون متصلاً عند س = $س_١$

البرهان:

يكون الاقتران ق(س) متصلاً عند س = $س_١$

إذا كان $\lim_{س \leftarrow س_١}$ ق(س) = ق($س_١$) أي $\lim_{س \leftarrow س_١}$ (ق(س) − ق($س_١$)) = صفر

المقدار ق(س) − ق($س_١$) = $\frac{ق(س) - ق(س_١)}{س - س_١}$ × (س − $س_١$) (بالضرب والقسمة على المقدار (س − $س_١$))

∴ $\lim_{س \leftarrow س_١}$ (ق(س) − ق($س_١$)) = $\lim_{س \leftarrow س_١}$ $\frac{ق(س) - ق(س_١)}{س - س_١}$ × (س − $س_١$)

= $\lim_{س \leftarrow س_١}$ $\frac{ق(س) - ق(س_١)}{س - س_١}$ × $\lim_{س \leftarrow س_١}$ (س − $س_١$)

= قَ($س_١$) × صفر = صفر

∴ $\lim_{س \leftarrow س_١}$ (ق(س) − ق($س_١$)) = صفر

مثال (٢)

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٢س^٢ + ٥ &، \quad س \leq ١ \\ ٤س + أ &، \quad س > ١ \end{cases}$

قابلاً للاشتقاق عند س = ١. فأوجد قيمة الثابت أ.

الحل:

ق(س) قابل للاشتقاق عند س = ١، فهو متصل عند س = ١

∴ $\lim_{س \leftarrow ١^+}$ ق(س) = $\lim_{س \leftarrow ١^-}$ ق(س) = ق(١)

٤ + أ = ٧

أ = ٣

ملاحظة:

النظرية السابقة تكافئ المعاكس الايجابي لها وهو العبارة :

إذا كان ق(س) اقتراناً غير متصل عند س = $س_1$ فإن ق(س) غير قابل للاشتقاق عند س = $س_1$

مثال (٣)

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^3 + ٥س^2 + ٢ & ، س \le ١ \\ س^2 + ٢س & ، س > ١ \end{cases}$

فابحث في قابلية الاقتران ق(س) للاشتقاق عند س = ١

الحل:

نبحث أولاً في اتصال ق(س) عند س = ١ :

ق(١) = ١ + ٥ + ٢ = ٨

$\lim\limits_{س \to ١^-}$ ق(س) = $\lim\limits_{س \to ١^-}$ (س^٣ + ٥ س^٢ + ٢) = ٨

$\lim\limits_{س \to ١^+}$ ق(س) = $\lim\limits_{س \to ١^+}$ (س^٢ + ٢س) = ٣

$\therefore$ ق(س) منفصل عند س = ١

وبالتالي فإن ق(س) غير قابل للاشتقاق عند س = ١

مثال (٤)

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^2 + ٤س - ٥ & ، س \le ٢ \\ ٣س + ١ & ، س > ٢ \end{cases}$

فابحث في قابلية الاقتران ق(س) للاشتقاق عند س = ٢

الحل:

ندرس أولاً اتصال ق(س) عند س=٢ فنجد أن :

ق(٢) = ٣ × ٢ + ١ = ٧

$\lim\limits_{س \to ٢^+}$ ق(س) = $\lim\limits_{س \to ٢^+}$ (٣س + ١) = ٧

$\lim\limits_{س \to ٢^-}$ ق(س) = $\lim\limits_{س \to ٢^-}$ (س^٢ + ٤س - ٥) = ٧

$\therefore$ ق(س) متصل عند س = ٢

لا يمكننا الحكم بناء على ذلك إن كان ق(س) قابلاً للاشتقاق أم لا ، ولهذا نلجأ لاستخدام

التعريف، مع مراعاة أن الاقتران يغير تعريفه عند س = ٢ مما يستوجب حساب المشتقتين اليمنى واليسرى عندها:

$$\text{قَ}(٢)^{+} = \lim_{\text{س}\to ٢^{+}} \frac{\text{ق(س)}-\text{ق}(٢)}{\text{س} - ٢} = \lim_{\text{س}\to ٢^{+}} \frac{(٣\text{س}+١)-(٤+٨-٥)}{\text{س} - ٢}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٢^{+}} \frac{٣\text{س}-٦}{\text{س} - ٢} = \lim_{\text{س}\to ٢^{+}} ٣ = ٣$$

$$\text{قَ}(٢)^{-} = \lim_{\text{س}\to ٢^{-}} \frac{\text{ق(س)}-\text{ق}(٢)}{\text{س} - ٢} = \lim_{\text{س}\to ٢^{-}} \frac{(\text{س}^{٢}+٤\text{س}-٥) - (٤+٨-٥)}{\text{س} - ٢}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٢^{-}} \frac{\text{س}^{٢}+٤\text{س}-١٢}{\text{س} - ٢} = \lim_{\text{س}\to ٢^{-}} \frac{(\text{س}-٢)(\text{س}+٦)}{\text{س} - ٢} = ٨$$

وعليه فإن قَ(٢) غير موجودة، أي أن ق(س) غير قابل للاشتقاق عند س = ٢ .

مثال (٥)

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} &، \text{س} < ١ \\ ٢\text{س}-١ &، \text{س} \geq ١ \end{cases}$ فأوجد الاقتران المشتق قَ(س).

الحل:

$$\text{قَ(س)} = \begin{cases} ٢\text{س} &، \text{س} < ١ \\ ٢ &، \text{س} > ١ \end{cases}$$

ولايجاد قَ(١) نبحث في اتصال الاقتران ق (س) عند س = ١ .

الاقتران ق (س) متصل عند س = ١ .   (تحقق من ذلك)

أ
$$\text{قَ}(١)^{+} = \lim_{\text{س}\to ١^{+}} \frac{\text{ق(س)} - \text{ق}(١)}{\text{س} - ١}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ١^{+}} \frac{(٢\text{س}-١) - (٢-١)}{\text{س} - ١} = \lim_{\text{س}\to ١^{+}} \frac{٢\text{س}-٢}{\text{س} - ١}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ١^{+}} \frac{٢(\text{س}-١)}{\text{س} - ١} = ٢$$

ب
$$\text{قَ}(١)^{-} = \lim_{\text{س}\to ١^{-}} \frac{\text{ق(س)} - \text{ق}(١)}{\text{س} - ١}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ١^{-}} \frac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س} - ١} = \lim_{\text{س}\to ١^{-}} \text{س} + ١ = ٢$$

$\Leftarrow$ قَ(١) = ٢ وبالتالي : قَ(س) = $\begin{cases} ٢س &، \quad س < ١ \\ ٢ &، \quad س > ١ \\ ٢ &، \quad س = ١ \end{cases}$

نلاحظ في المثال السابق أن : قَ(١)$^+$ = $\lim_{س \to ١^+}$ قَ(س) ، قَ(١)$^-$ = $\lim_{س \to ١^-}$ قَ(س)

وهذا يزودنا بطريقة أخرى غير طريقة التعريف لإيجاد المشتقة عند النقطة التي يغير عندها الاقتران تعريفه إذا كان متصلاً، وكان قابلاً للإشتقاق من كلا الطرفين.

مثال (٦)

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^٣-س^٢+٨ &، \quad س \leq ٢ \\ س^٢+٤س &، \quad س > ٢ \end{cases}$ فأوجد قَ(س).

الحل:

قَ(س) = $\begin{cases} ٣س^٢-٢س &، \quad س < ٢ \\ ٢س+٤ &، \quad س > ٢ \end{cases}$

ولايجاد قَ(٢) دون اللجوء إلى التعريف :

أ ندرس اتصال ق(س) عند س = ٢

ق(٢) = ٨ − ٤ + ٨ = ١٢

$\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٢^-}$ (س^٣ − س^٢ + ٨) = ١٢

$\lim_{س \to ٢^+}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٢^+}$ (س^٢+٤س) = ١٢

$\therefore$ ق(س) متصل عند س = ٢ .

ب قَ(٢)$^+$ = $\lim_{س \to ٢^+}$ قَ(س) = $\lim_{س \to ٢^+}$ (٢س + ٤) = ٨

قَ(٢)$^-$ = $\lim_{س \to ٢^-}$ قَ(س) = $\lim_{س \to ٢^-}$ (٣س^٢ − ٢س) = ٨

$\therefore$ قَ(٢) = ٨

$\Leftarrow$ قَ(س) = $\begin{cases} ٣س^٢-٢س &، \quad س < ٢ \\ ٢س+٤ &، \quad س > ٢ \\ ٨ &، \quad س = ٢ \end{cases}$

تمارين (4-3)

١ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^٢ + ١ & ، \quad س \leq ٠ \\ س + م & ، \quad س < ٠ \end{cases}$

ما قيمة م التي تجعل الاقتران ق(س) متصلاً عند س = ٠ ؟

وهل هذه القيمة لـ م تجعل الاقتران ق(س) قابلاً للاشتقاق عند س = ٠ ؟

٢ إذا كان ق(س) = $|س|^٣$ فأوجد قَ(س) .

٣ العبارتان الآتيتان خاطئتان . أعط مثالاً يوضح خطأ كلٍ منهما .

أ إذا كان ق(س) اقتراناً بحيث إن قَ(١) = ٣ فإنّ قَ(٢) = ٦ .

ب إذا كان كلٌّ من ق(س)، هـ(س) اقتراناً غير قابل للاشتقاق عند س = م فإن مجموعهما غير قابل للاشتقاق عِند س = م

5-3 الاشتقاق الضمني (Implicit Differentiation)

تعرفنا سابقاً كيف نجد المشتقة الأولى لاقتران صورته ص = ق(س) حيث ص معطاة بصورة صريحة بدلالة س . وفي الحالات الأخرى التي يظهر فيها المتغيران معاً في أحد طرفي المعادلة أو كليهما ، يقال إن ص تُعرِّف ضمنياً اقتراناً أو أكثر . ويمكن حساب المشتقة لأي من هذه الاقترانات بالطريقة المسماه الاشتقاق الضمني كما في المثال التالي :

مثال (١)

إذا كانت $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٢٥$ فأوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

ومن ذلك ، أوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ عندما س = ٣ .

الحل:

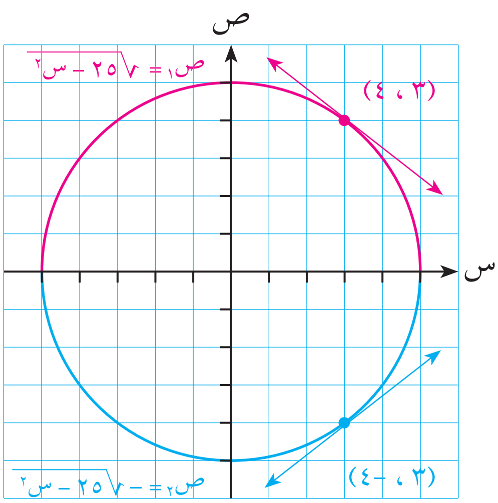
نشتق طرفي العلاقة بالنسبة لـ س كما يلي :

$$\frac{\text{د}}{\text{د س}}(\text{س}^{٢}) + \frac{\text{د}}{\text{د س}}(\text{ص}^{٢}) = \frac{\text{د}}{\text{د س}}(٢٥)$$

$$٢\text{س} + \frac{\text{د}}{\text{د ص}}(\text{ص}^{٢}) \times \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{صفر}$$

$$٢\text{س} + ٢\text{ص} \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{صفر}$$

$$\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{-٢\text{س}}{٢\text{ ص}} = \frac{-\text{س}}{\text{ص}}$$



الشكل (٢-١٠)

عندما س = ٣ تكون ص = ∓٤

$$\therefore \left.\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{(٣ ، ٤)} = \frac{-٣}{٤}$$

وهي تمثل ميل المماس لمنحنى الاقتران $\text{ص}_{١} = \sqrt{٢٥ - \text{س}^{٢}}$

كما في الشكل (٢-١٠) (النصف العلوي من الدائرة) .

$$\left.\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{(٣ ، -٤)} = \frac{-٣}{-٤} = \frac{٣}{٤}$$

وهي تمثل ميل المماس لمنحنى الاقتران $\text{ص}_{٢} = -\sqrt{٢٥ - \text{س}^{٢}}$

كما في الشكل (٢-١٠) (النصف السفلي من الدائرة) .

مثال (٢)

إذا كانت $\text{ل}^{٢}\text{م}^{٣} + ٥\text{م} = ٤\text{ل} + ٦$ فأوجد $\frac{\text{دل}}{\text{دم}}$.

الحل:

باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ م ينتج أن :

$$\text{ل}^{٢} \times ٣\text{م}^{٢} + \text{م}^{٣} \times ٢\text{ل}\,\frac{\text{دل}}{\text{دم}} + ٥ = ٤\,\frac{\text{دل}}{\text{دم}}$$

$$٢\text{ل}\,\text{م}^{٣}\,\frac{\text{دل}}{\text{دم}} - ٤\,\frac{\text{دل}}{\text{دم}} = -٥ - ٣\text{ل}^{٢}\text{م}^{٢}$$

$$\frac{\text{دل}}{\text{دم}}\left(٢\text{ل}\,\text{م}^{٣} - ٤\right) = -٥ - ٣\text{ل}^{٢}\text{م}^{٢}$$

$$\Leftarrow \quad \frac{\text{دل}}{\text{دم}} = \frac{-٥ - ٣\text{ل}^{٢}\text{م}^{٢}}{٢\text{ل}\,\text{م}^{٣} - ٤}$$

مثال (٣)

إذا كانت $(\text{س}+٣\text{ص})^{٥} = ٢\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٣} - ٧$ ، فأوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$.

الحل:

باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ س ينتج أن :

$$٥\,(\text{س}+٣\text{ص})^{٤}\left(١ + ٣\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right) = ٤\text{س} + ٣\text{ص}^{٢}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$$

$$٥(\text{س}+٣\text{ص})^{٤} + ١٥(\text{س}+٣\text{ص})^{٤}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٤\text{س} + ٣\text{ص}^{٢}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\left(١٥(\text{س}+٣\text{ص})^{٤} - ٣\text{ص}^{٢}\right) = ٤\text{س} - ٥(\text{س}+٣\text{ص})^{٤}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٤\text{س} - ٥(\text{س}+٣\text{ص})^{٤}}{١٥(\text{س}+٣\text{ص})^{٤} - ٣\text{ص}^{٢}}$$

مثال (٤)

جد معادلة المماس للمنحنى $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ٤\text{س} + ٢\text{ص} = ٢٠$ المرسوم عند النقطة $(-١ ، ٣)$ الواقعة عليه .

الحل:

باشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة للمتغير س ينتج أن :

$$٢\text{س} + ٢\text{ص}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} - ٤ + ٢\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٠$$

وبالتعويض في النقطة $(-١ ، ٣)$ يكون :

$-٢ + ٦ \frac{د ص}{د س} - ٤ + ٢ \frac{د ص}{د س} = ٠$ ، و منها $\frac{د ص}{د س} = \frac{٣}{٤}$

∴ ميل المماس المرسوم للمنحنى عند النقطة (−١ ، ٣) يساوي $\frac{٣}{٤}$

∴ معادلة المماس هي :

$ص - ص_١ = م(س - س_١)$

$ص - ٣ = \frac{٣}{٤}(س + ١)$

$٤ص - ١٢ = ٣س + ٣$

$ص = \frac{٣}{٤} س + \frac{١٥}{٤}$

نتيجة: مشتقة القوى الكسرية:

إذا كانت $ص = س^{\frac{م}{ن}}$ ، $\frac{م}{ن}$ عدد نسبي ، فإن : $\frac{د ص}{د س} = \frac{م}{ن} س^{\frac{م}{ن}-١}$

البرهان:

$ص = س^{\frac{م}{ن}}$

$ص^ن = (س^{\frac{م}{ن}})^ن$

$ص^ن = س^م$

بالاشتقاق بالنسبة لـ س :

$\Leftarrow ن ص^{ن-١} \frac{د ص}{د س} = م س^{م-١}$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{م س^{م-١}}{ن ص^{ن-١}} = \frac{م}{ن} \times \frac{س^{م-١}}{(س^{\frac{م}{ن}})^{ن-١}} = \frac{م}{ن} \times \frac{س^{م-١}}{س^{م-\frac{م}{ن}}} = \frac{م}{ن} س^{م-١-م+\frac{م}{ن}} = \frac{م}{ن} س^{\frac{م}{ن}-١}$$

مثال (٥)

إذا كان $ق(س) = س^{\frac{٢}{٣}}$ ، فأوجد $\acute{ق}(٨)$.

الحل:

$\acute{ق}(س) = \frac{٢}{٣} س^{\frac{-١}{٣}}$

$\acute{ق}(٨) = \frac{٢}{٣}(٨)^{\frac{-١}{٣}} = \frac{٢}{٣} \times (٢^٣)^{\frac{-١}{٣}} = \frac{٢}{٣} \times ٢^{-١}$

$= \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٣}$

مثال (٦)

لتكن م = ل$^{\frac{٤}{٥}}$ − ٦ل$^{\frac{٥}{٣}}$ + ٨ل$^{\frac{١}{٤}}$ أوجد $\left.\frac{دم}{دل}\right|_{ل=١}$.

الحل:

$\frac{دم}{دل} = \frac{٤}{٥}$ ل$^{\frac{-١}{٥}}$ − ٦ x $\frac{٥}{٣}$ ل$^{\frac{٢}{٣}}$ + ٨ x $\frac{١}{٤}$ ل$^{\frac{-٣}{٤}}$

$= \frac{٤}{٥}$ ل$^{\frac{-١}{٥}}$ − ١٠ل$^{\frac{٢}{٣}}$ + ٢ل$^{\frac{-٣}{٤}}$

وعندما ل = ١ تكون $\frac{دم}{دل} = \frac{٤}{٥}$ x ١ − ١٠ x ١ + ٢ x ١

= −٢,٧

ويمكن تعميم النتيجة السابقة على النحو الآتي:

إذا كانت ص = (ق(س))$^{\frac{م}{ن}}$ ، $\frac{م}{ن}$ عدد نسبي ، ق(س) قابل للاشتقاق فإن :

$\frac{دص}{دس} = \frac{م}{ن}$ (ق(س))$^{\frac{م}{ن}-١}$ x قَ(س)

وبشكل خاص :

إذا كانت ص = $\sqrt{ق(س)}$ ، ق(س) > ٠ قَ(س) موجودة فإن : $\frac{دص}{دس} = \frac{قَ(س)}{٢\sqrt{ق(س)}}$

مثال (٧)

إذا كانت ص = $\sqrt[٥]{س^٣ + ٢٤}$ فأوجد $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=٢}$.

الحل:

ص = (س^٣ + ٢٤)$^{\frac{١}{٥}}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٥}$ (س^٣ + ٢٤)$^{\frac{-٤}{٥}}$ (٣س^٢)

$\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=٢} = \frac{١}{٥}$ (٣٢)$^{\frac{-٤}{٥}}$ (١٢)

$= \frac{١ \times ١٢}{٥ \times ١٦} = \frac{٣}{٢٠}$

مثال (٨)

إذا كانت ص = $\sqrt{س^{٢}+س+٨}$ فأوجد $\frac{د ص}{د س}$.

الحل:

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{(٢س+١)}{٢\sqrt{س^{٢}+س+٨}}$$

مثال (٩)

إذا كان $\sqrt{٣س ص} = س^{٢} + ٥$ فأوجد $\frac{د ص}{د س}$.

الحل:

باشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة لـ س ينتج أن :

$$\frac{٣س \frac{د ص}{د س} + ٣ ص}{٢\sqrt{٣س ص}} = ٢س$$

$$٣س \frac{د ص}{د س} + ٣ص = ٤س \sqrt{٣س ص}$$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{٤س \sqrt{٣س ص} - ٣ص}{٣س}$$

ملاحظة : يمكن حل المثال بطريقة أخرى ، وذلك بتربيع الطرفين ثم الاشتقاق الضمني بالنسبة إلى س .

تمارين (5-3)

١ في كل من العلاقات التالية، جد المشتقة المذكورة إزاءها:

أ) $\text{س ص} + \text{ص}^{٢} = ٣\text{س} - ٥$ ؛ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

ب) $\text{ع ل} - ٥\text{ع} = \text{ل}^{٢} + ٣$ ؛ $\frac{\text{د ل}}{\text{د ع}}$

جـ) $(\text{س} + ٢\text{ص})^{٥} = ٣\text{س} - \text{ص}^{٢}$ ؛ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

د) $\text{ص} = ٦\,\text{س}^{\frac{٢}{٣}} + ١٠\,\text{س}^{\frac{-٤}{٥}} + ٣\text{س} - ٤$ ؛ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

هـ) $\text{ل} = \sqrt[٣]{٢\text{س} + ١٨}$ ؛ $\left.\frac{\text{د ل}}{\text{د س}}\right|_{\text{س} = -٥}$

و) $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^{٢} - \text{س} + ٧}$ ؛ $\acute{\text{ق}}(٢)$

ز) $\sqrt{٣\text{س} + \text{ص}} = \text{س}^{٢} + ٣\text{ص} - ٥$ ؛ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

٢ بيِّن أن النقطة (٣، ٢) تقع على منحنى العلاقة: $\text{س}^{٢} + \text{س ص} + \text{ص}^{٢} = ١٩$ ، ثم أوجد معادلة المماس والعمودي على المنحنى عندها.

٣ إذا كانت $\text{ص}^{٣} + \text{ص} = \text{س}$ فأوجد $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}}$ عند النقطة (٢ ، ١).

5-3 مشتقات الاقترانات الدائرية

تستخدم الاقترانات الدائرية في وصف الكثير من الظواهر التي تحمل صفة الدورية مثل : الحركة التوافقية البسيطة ، والحقول الكهرومغناطيسية ، وغيرها مما يمنح دراسة مشتقات هذه الاقترانات أهمية خاصة في فهم كثير من الظواهر الطبيعية .

نظرية (١):

إذا كان ق(س) = جاس ، س بالتقدير الدائري ، فإن قَ(س) = جتا س .

مثال (١)

إذا كان ق (س) = جا س ، فأوجد قَ$\left(\frac{\pi}{٦}\right)$.

الحل:

قَ(س) = جتا س

قَ$\left(\frac{\pi}{٦}\right)$ = جتا$\left(\frac{\pi}{٦}\right)$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

مثال (٢)

إذا كان هـ (س) = $س^٢$ جاس فأوجد هـَ(س) .

الحل:

هـَ(س) = $س^٢$ جتا س + ٢س جا س

مثال (٣)

إذا كانت ص= جا (٥–٣س) فأوجد $\frac{دص}{د س}$.

الحل:

$\frac{دص}{د س}$ = جتا (٥–٣س) x –٣ = –٣ جتا (٥–٣س)

مثال (٤)

إذا كان ع = جا (جا س) أوجد $\left.\frac{دع}{د س}\right|_{س = \pi}$.

الحل:

$\frac{دع}{د س}$ = $\Big($جتا (جا س)$\Big)$ x جتا س

وعندما س = π فإن $\frac{دع}{د س}$ = $\Big($جتا (جا π)$\Big)$ x جتا π

= جتا ٠ x جتا π = ١ x –١ = –١

نظرية (٢):

إذا كان ق(س) = جتا س ، فإن قَ(س) = – جا س

البرهان:

ق (س) = جتا س = جا ($\frac{\pi}{٢}$ –س)

قَ(س) = جتا ($\frac{\pi}{٢}$ –س) x –١ = –جا س

مثال (٥)

إذا كان هـ(س)= $جتا^٣$ (١–٢س) فأوجد هـَ(س)

الحل:

هـ(س) = $\Big($جتا (١–٢س)$\Big)^٣$

هـَ(س) = ٣$\Big($جتا (١–٢س)$\Big)^٢$ x $\Big($– جا (١–٢س)$\Big)$ x –٢

= ٦ $جتا^٢$(١–٢س) جا (١–٢س)

مثال (٦)

إذا كان جتا(س ص) = س ، فأوجد $\frac{د ص}{د س}$

الحل:

باشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة إلى س ينتج أن :

$$-جا\left(س ص\right) \times \left(س \frac{د ص}{د س} + ص\right) = ١$$

$$-س جا\left(س ص\right) \times \frac{د ص}{د س} = ١ + ص جا\left(س ص\right)$$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{١ + ص جا\left(س ص\right)}{-س جا\left(س ص\right)} = -\frac{١ + ص جا\left(س ص\right)}{س جا\left(س ص\right)}$$

نظرية (٣): مشتقات الاقترانات الدائرية الأخرى:

١ إذا كانت ص = ظا س فإن $\frac{د ص}{د س}$ = قا^٢ س

٢ إذا كانت ص = ظتا س فإن $\frac{د ص}{د س}$ = -قتا^{٢}س

٣ إذا كانت ص = قا س فإن $\frac{د ص}{د س}$ = قا س ظا س

٤ إذا كانت ص = قتا س فإن $\frac{د ص}{د س}$ = -قتا س ظتا س

البرهان:

١ ص = ظا س = $\frac{جا س}{جتا س}$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{جتا س \times جتا س - جا س \times - جا س}{جتا^٢ س} = \frac{جتا^٢ س + جا^٢ س}{جتا^٢ س} = \frac{١}{جتا^٢ س} = قا^٢ س$$

ويمكن البرهنة على صحة القواعد ٢ ، ٣ ، ٤ بطريقة مماثلة .

مثال (٧)

إذا كانت ص = ٢ ظا س – قتا^{٢} ٥س أوجد $\frac{د ص}{د س}$.

الحل:

ص= ٢ ظا س – (قتا ٥س)^{٢}

$\frac{د ص}{د س}$ = ٢قا^{٢} س – ٢(قتا ٥ س)^{١} (–قتا ٥ س ظتا ٥س) x ٥

= ٢ قا^{٢} س+١٠ قتا^{٢} ٥ س ظتا ٥ س

مثال (٨)

إذا كانت ف = جا ٣ ن+ جتا ٢ ن هي العلاقة بين الإزاحة ف بالأمتار والزمن (ن) بالثواني لجسم يتحرك على خط مستقيم، فأوجد سرعة وتسارع هذا الجسم عندما ن = $\frac{\pi}{٦}$.

الحل:

ع = $\frac{د ف}{د ن}$ = ٣ جتا ٣ ن – ٢ جا ٢ ن

وعندما ن = $\frac{\pi}{٦}$ فإن ع = ٣ جتا $\frac{\pi}{٢}$ – ٢ جا $\frac{\pi}{٣}$

ع = ٠ – ٢ x $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = –$\sqrt{٣}$ م/ث

ت= $\frac{دع}{د ن}$ = –٩ جا ٣ ن – ٤ جتا ٢ ن

وعندما ن = $\frac{\pi}{٦}$ فإن ت = –٩ جا $\frac{\pi}{٢}$ – ٤ جتا $\frac{\pi}{٣}$

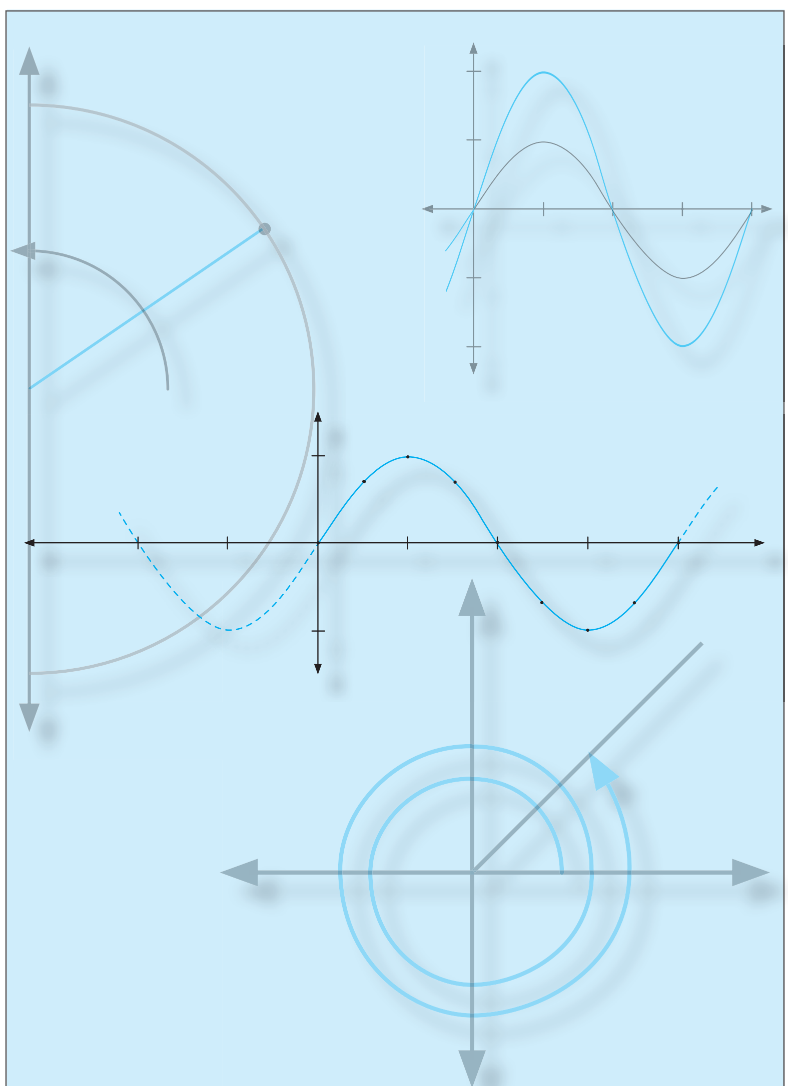
= –٩ –٤ x $\frac{١}{٢}$

=–١١ م/ث^{٢}

الوحد الرابعة

4

التكامل



٤-١ التكامل غير المحدود (Indefinite Integral)

تعرفنا فيما سبق عملية التفاضل التي تناولت أساساً إيجاد المشتقة الأولى لاقتران معلوم، واستخدمنا المشتقة في تطبيقات كثيرة منها إيجاد السرعة اللحظية لجسم متحرك، وميل المماس لمنحنى اقتران معلوم عند أي نقطة عليه؛ وفي هذا البند ستتعرف العملية العكسية لعملية التفاضل، أي إيجاد الاقتران الذي علمت مشتقته الأولى، وتسمى هذه العملية عملية التكامل. وكما سمينا الاقتران الناتج عن تفاضل اقتران معلوم الاقتران المشتق، فإننا نسمي الاقتران الأصلي الذي علمت مشتقته الأولى اقتراناً بدائياً للمشتقة (أو عكس المشتقة)، فمثلاً الاقتران $س^٣$ هو اقتران بدائي (أو عكس المشتقة) للاقتران $٣س^٢$، والاقتران جاس هو اقتران بدائي للاقتران جتاس، وهكذا.

بوجه عام:

تعريف:

يسمى الاقتران م(س) اقترانا بدائياً للاقتران ق(س) إذا كان $م'$(س) = ق(س).

مثال (١): ليكن ق(س) = ٢ . أكتب ثلاثة اقترانات بدائية للاقتران ق(س).

الحل: من معلوماتنا في التفاضل يكون كلٌ من الاقترانات الآتية اقتراناً بدائياً للاقتران ق(س):

$م_١$(س) = ٢س

$م_٢$(س) = ٢س + ٢

$م_٣$(س) = ٢س − ١

وذلك لأن $م'_١$(س) = $م'_٢$(س) = $م'_٣$(س) = ٢ = ق(س).

لاحظ أنه توجد اقترانات بدائية أخرى للاقتران ق(س) = ٢؛ وفي الواقع يوجد عدد لانهائي من هذه الاقترانات، وبالتأمل فيها نجد أنها تتخذ الصورة العامة ٢س + جـ، حيث جـ عدد حقيقي.

وتسمى هذه الصورة التكامل غير المحدود للاقتران ق(س) = ٢

تعريف:

إذا كان م(س) اقتراناً بدائياً للاقتران ق (س)، (أي أن $\bar{م}$(س) = ق (س)) فإن التكامل غير المحدود للاقتران ق (س)، والذي يرمز له بالرمز $\int$ ق (س)ءس، ويُقرأ: تكامل ق (س) دال س، هو مجموعة جميع الاقترانات البدائية للاقتران ق (س) أي أن: $\int$ ق (س) ءس = م(س) + جـ ، جـ عدد حقيقي.

مثال (٢): باستخدام معلوماتك في التفاضل، أوجد كلاً من التكاملين غير المحدودين التاليين:

أ $\int$ ٤س^{٣} ءس

ب $\int$ قا^{٢}س ءس

الحل:

أ $\int$ ٤س^{٣} ءس = س^{٤} + جـ لأن $\frac{ء}{ءس}$ (س^{٤} + جـ) = ٤س^{٣}

ب $\int$ قا^{٢}س ءس = ظاس + جـ لأن $\frac{ء}{ءس}$ (ظاس + جـ) = قا^{٢}س

بالاعتماد على قوانين الاشتقاق المعروفة يمكنك التحقق من صحة قواعد التكامل غير المحدود الآتية:

١ $\int$ أ ءس = أس + جـ ، أ ، جـ $\in$ ح

٢ $\int$ س^{ن} ءس = $\frac{س^{ن+١}}{ن + ١}$ + جـ ، ن عدد حقيقي $\neq$ -١ ، جـ $\in$ ح

٣ $\int$ جاس ءس = -جتاس + جـ ، جـ $\in$ ح

٤ $\int$ جتاس ءس = جاس + جـ ، جـ $\in$ ح

٥ $\int$ قا^{٢}س ءس = ظاس + جـ ، جـ $\in$ ح

٦ $\int$ قتا^{٢}س ءس = -ظتاس + جـ ، جـ $\in$ ح

٧ $\int$ قاس ظاس ءس = قاس + جـ ، جـ $\in$ ح

٨ $\int$ قتاس ظتاس ءس = -قتاس + جـ ، جـ $\in$ ح

كما يمكنك التحقق من صحة الخواصّ الآتية :

١ $\int$ أ ق(س) ءس = أ $\int$ ق(س) ءس ، أ ∈ ح

٢ $\int$ (ق(س) ∓ هـ(س)) ءس = $\int$ ق(س) ءس ∓ $\int$ هـ(س) ءس

(ويمكن تعميم هذه الخاصية لتشمل أكثر من اقترانين)

مثال (٣): جد التكاملات غير المحدودة الآتية :

أ $\int$ ٥ ءس

ب $\int$ ٨س^{٣} ءس

جـ $\int$ (٦س^{٤} + جتاس) ءس

د $\int$ (٣س^{٢} – ٥س$^{-٢}$ + ٧) ءس

الحل:

أ $\int$ ٥ ءس = ٥س + جـ

ب $\int$ ٨س^{٣} ءس = ٨ $\int$ س^{٣} ءس

$= ٨ \times \frac{س^{٤}}{٤}$ + جـ = ٢س^{٤} + جـ

جـ $\int$ (٦س^{٤} + جتاس) ءس = $\int$ ٦س^{٤} ءس + $\int$ جتاس ءس

$= \frac{٦س^{٥}}{٥}$ + جـ$_{١}$ + جاس + جـ$_{٢}$

$= \frac{٦س^{٥}}{٥}$ + جاس + جـ ، حيث جـ = جـ$_{١}$ + جـ$_{٢}$

د $\int$ (٣س^{٢} – ٥س$^{-٢}$ + ٧) ءس = ٣ $\int$ س^{٢} ءس – ٥ $\int$ س$^{-٢}$ ءس + $\int$ ٧ ءس

$= ٣ \times \frac{س^{٣}}{٣} – ٥ \times \frac{س^{-١}}{-١}$ + ٧س + جـ

= س^{٣} + ٥س$^{-١}$ + ٧س + جـ

تطبيقات:

يستخدم التكامل غير المحدود في تطبيقات هندسية وفيزيائية متعددة، مثل إيجاد معادلة منحنى اقتران إذا عُلم ميل المماس له عند أية نقطة عليه، أو إيجاد سرعة جسم متحرك إذا عُلم تسارعه، كما يتبين في الأمثلة التالية :

مثال (٤): جد قاعدة الاقتران ق (س) إذا كان ميل المماس له عند أي نقطة (س، ص) عليه هو ٢س، وكان منحنى الاقتران ق (س) يمر بالنقطة (٢ ، ٥).

الحل:

ميل المماس = ق̅ (س) = ٢س

∴ ق (س) = ∫ ٢س ءس = س^{٢} + جـ

وبما أن منحنى الاقتران ق (س) يمر بالنقطة (٢ ، ٥) فإن هذه النقطة تحقق معادلة المنحنى،

أي أن ق (٢) = ٥ ، إذن ٥ = (٢)^{٢} + جـ ، ومنها جـ = ١

∴ ق (س) = س^{٢} + ١

مثال (٥): تحرك جسم من السكون من نقطة الأصل في خط مستقيم بتسارع ت = ٢ن + ١ سم/ث^{٢}. جد:

أ سرعة الجسم عند ن = ٣ ب إزاحة الجسم عن نقطة الأصل عند ن = ٣

الحل:

أ التسارع ت = $\frac{ءع}{ءن}$ = ٢ن + ١

∴ ع = ∫ (٢ن + ١) ءن = ن^{٢} + ن + جـ

وحيث إن ع = ٠ عند ن = ٠، فإن ٠ = ٠ + ٠ + جـ ، ومنها جـ = ٠

أي أن ع = ن^{٢} + ن

∴ ع $|_{ن=٣}$ = ٣^{٢} + ٣ = ١٢ سم/ث

ب ع = $\frac{ءف}{ءن}$ = ن^{٢} + ن

∴ ف = ∫ (ن^{٢}+ن) ءن = $\frac{ن^{٣}}{٣}$ + $\frac{ن^{٢}}{٢}$ + جـ$_{١}$

وحيث إن ف = ٠ ، عندما ن = ٠

∴ ٠ = ٠ + جـ$_{١}$ ، ومنها جـ$_{١}$ = ٠

أي أن ف = $\frac{١}{٣}$ن^{٣} + $\frac{١}{٢}$ن^{٢}

∴ ف $|_{ن=٣}$ = $\frac{١}{٣}$ × ٣^{٣} + $\frac{١}{٢}$ × ٣^{٢}

= ٩ + ٤,٥ = ١٣,٥ سم

تمارين (٤-١)

١ تحقق من أن الاقتران م(س) هو اقتران بدائي للاقتران ق(س) في كل حالة:

أ) $\text{م(س)} = \frac{\text{س}}{١ + \text{س}^٢}$ ، $\text{ق(س)} = \frac{١ - \text{س}^٢}{(١ + \text{س}^٢)^٢}$

ب) $\text{م(س)} = \text{جا}\text{س}^٢$ ، $\text{ق(س)} = ٢\text{س جتا}\text{س}^٢$

٢ جد كلاً من التكاملات غير المحدودة الآتية:

أ) $\int (\text{س}^٣ + ٥)\ \text{ءس}$

ب) $\int \frac{١}{(٢\text{س})^٣}\ \text{ءس}$

جـ) $\int \left(\sqrt{\text{س}} + \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}\right) \text{ءس}$

د) $\int \text{ص}^٢ \sqrt{\text{ص}}\ \text{ءص}$

هـ) $\int \frac{\text{س}^٣ - ١}{\text{س} - ١}\ \text{ءس}$

و) $\int (٢\text{جاس} - ٣\text{جتا س})\ \text{ءس}$

ز) $\int (٦ + ٦\text{ظا}^٢\text{س})\ \text{ءس}$

ح) $\int \left(\frac{\text{جا س}}{١ - \text{جا}^٢\text{س}}\right) \text{ءس}$

٣ أوجد الاقتران ق(س) الذي يحقق الشروط المعطاة في كل حالة:

أ) $\text{ق}'(\text{س}) = ٦\text{س}^٢ - ٨\text{س} + ٧$ ، $\text{ق}(١) = ٣$

ب) $\text{ق}''(\text{س}) = ١٢\text{س} - ٨$ ، $\text{ق}'(٢) = ٨$ ، $\text{ق}(٢) = ٥$

2-4 التكامل المحدود (Definite Integral)

تعريف:

إذا كان ق(س) اقتراناً معرفاً ومحدوداً* على [أ ، ب]، $\sigma_ن$ تجزئة نونية منتظمة للفترة [أ ، ب]، وكانت $\underset{ن \leftarrow \infty}{\text{نهــا}}$ م ($\sigma_ن$، ق) موجودة ومتساوية لجميع قيم $س^*_ر \in$ [$س_{ر-١}$ ، $س_ر$]، فإنه يقال إن الاقتران ق(س) قابل للتكامل على الفترة [أ ، ب]، وتسمى النهاية المذكورة التكامل المحدود للاقتران ق(س) على [أ ، ب]، ويرمز له بالرمز $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس ؛ أي أن $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس = $\underset{ن \leftarrow \infty}{\text{نهــا}}$ م ($\sigma_ن$ ، ق)

ملاحظات:

١ في التكامل المحدود $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس ، نسمي أ الحد السفلي للتكامل ونسمي ب الحد العلوي له .

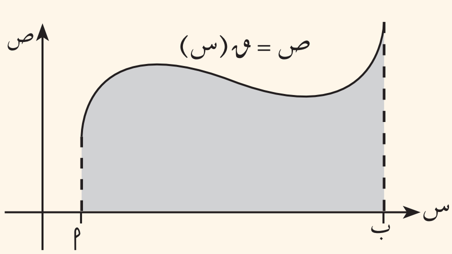
٢ تتوقف قيمة التكامل المحدود $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس على قاعدة الاقتران ق وعلى العددين أ ، ب ، أما المتغير س فليس له أهمية خاصة في عملية التكامل ويمكن أن يحل محله أي متغير آخر ، مثل ص ، ع ، . . . ، أي أن :

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\, ءس = \int_{أ}^{ب} ق(ص)\, ءص = \int_{أ}^{ب} ق(ع)\, ءع = \ldots \text{ إلخ}$$

٣ إن تعريف التكامل المحدود $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس الوارد في أعلاه يتضمن افتراض أن أ < ب، أي أن الحد السفلي للتكامل أصغر من الحد العلوي له . وفي الحالات الأخرى نستخدم التعريفين التاليين :

١ $\int_{أ}^{أ}$ ق(س) ءس = ٠   ٢ $\int_{ب}^{أ}$ ق(س) ءس = $-\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس

٤ إذا كان ق(س) اقتراناً غير سالب على [أ ، ب] وقابلاً للتكامل فإن التكامل المحدود $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس يمثل مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب . لاحظ الشكل (٤-٤) .



الشكل (٤-٤)

---

* يقال إن ق(س) اقتران محدود على الفترة المغلقة [أ ، ب] إذا وفقط إذا وجد عددان حقيقيان ل ، م بحيث إن : ل ≤ ق(س) ≤ م لجميع قيم س ∈ [أ ، ب].

ق

ق ق

ق

بوجه عام :

قاعدة:

إذا كان ق(س) = جـ ، لجميع س ∈ [أ ، ب]، جـ ثابت ، فإن $\int_{أ}^{ب}$ جـ ءس = جـ(ب − أ)

مثال (١): أوجد قيمة كل من :

أ $\int_{-١}^{٢}$ ٦ ءس

ب $\int_{٠}^{٢}$ π ءس

الحل:

أ $\int_{-١}^{٢}$ ٦ ءس = ٦(٢−(−١)) = ٦ × ٣ = ١٨

ب $\int_{٠}^{٢}$ π ءس = π(٢−٠) = ٢π

نظرية:

إذا كان الاقتران ق(س) متصلاً على الفترة المغلقة [أ ، ب] فإنه يكون قابلاً للتكامل على تلك الفترة .

ق ق

بوجه عام يمكن التوصل إلى القاعدة التالية :

قاعدة:

إذا كان الاقتران ق (س) = س$^{\text{ن}}$ معرفاً على [أ ، ب]، ن عدد حقيقي ≠ −١ ، فإن

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{س}^{\text{ن}}\, \text{د}\text{س} = \frac{\text{ب}^{\text{ن}+١} - \text{أ}^{\text{ن}+١}}{\text{ن} + ١}$$

مثال (2): جد قيمة كلٍّ من التكاملات التالية :

أ $\int_{١}^{٣} \text{س}^{٤}\, \text{د}\text{س}$

ب $\int_{١}^{٤} \sqrt{\text{نق}}\, \text{د}\text{نق}$

الحل:

أ $\int_{١}^{٣} \text{س}^{٤}\, \text{د}\text{س} = \frac{٣^{٤+١} - ١^{٤+١}}{٤ + ١} = \frac{٣^{٥} - ١^{٥}}{٥} = \frac{٢٤٢}{٥}$

ب $\int_{١}^{٤} \sqrt{\text{نق}}\, \text{د}\text{نق} = \frac{٤^{\frac{١}{٢}+١} - ١^{\frac{١}{٢}+١}}{\frac{١}{٢} + ١} = \frac{٤^{\frac{٣}{٢}} - ١^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} = \frac{١٤}{٣}$

نظرية:

إذا كان الاقتران ق (س) قابلاً للتكامل على الفترة المغلقة [أ ، ب]، وكان الاقتران هـ(س) = ق (س) لجميع قيم س ∈ [أ ، ب]، عدا مجموعة منتهية من قيم س في الفترة [أ ، ب]، فإن هـ(س) يكون قابلاً للتكامل على [أ ، ب]، ويكون $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ}(\text{س})\, \text{د}\text{س} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\, \text{د}\text{س}$

مثال (3): إذا كان ق(س) = [س] معرفاً على الفترة [٠ ، ١]، فبين أن ق(س) قابل للتكامل على [٠ ، ١] ثم أوجد $\int_{٠}^{١} [س]\ دس$

الحل:

بفرض أن هـ(س) = ٠ لجميع س ∈ [٠ ، ١]

يكون ق(س) = هـ(س) لجميع س ∈ [٠ ، ١] عدا عند س = ١ ، أي أن ق(س) متصل على مجاله ما عدا عند نقاط يمكن عدها ، وفي هذه الحالة ق(س) غير متصل عند نقطة واحدة .

وحيث إن هـ(س) = ٠ قابل للتكامل على [٠ ، ١]، لأنه اقتران ثابت

إذن ق(س) = [س] قابل للتكامل على [٠ ، ١]

ويكون $\int_{٠}^{١} [س]\ دس = \int_{٠}^{١} ٠\ دس =$ صفر

تمارين (4-2)

ق ق

ق ق

ق
ق
ق
ق

١ أوجد قيمة كلٍّ من :

أ) $\int_{٢}^{٨} \frac{١}{س^{٢}}\ دس$ ب) $\int_{-١}^{٢} ٦\ دس$ جـ) $\int_{-٢}^{٢} ص^{٥}\ دص$ د) $\int_{١,٣}^{١,٣} س^{٣}\ دس$

٢ عين الثابت الموجب ب في كلٍّ من الحالات التالية :

أ) $\int_{٠,٥}^{٣} ب\ دس = ١٥$ ب) $\int_{١}^{ب} س\ دس = ٢٤$ جـ) $\int_{٠}^{١} ع^{ب}\ دع = ٠,٢٥$

3-4 خصائص التكامل المحدود

للتكامل المحدود خصائص مهمة تساعد في تسهيل حسابه لبعض الاقترانات في كثير من الحالات، ومن هذه الخصائص :

خاصيّة (١):

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل على [أ ، ب]، وكان جـ أي عدد حقيقي، فإن الاقتران جـ ق(س) يكون قابلاً للتكامل على [أ ، ب]، ويكون $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{جـ ق(س) ءس} = \text{جـ} \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) ءس}$

ق ق

ق

ق

ق ق

مثال (١): أوجد $\int_{١}^{٤} \text{٣س}^{٢} \text{ءس}$

الحل:

$$\int_{١}^{٤} \text{٣س}^{٢} \text{ءس} = ٣ \int_{١}^{٤} \text{س}^{٢} \text{ءس}$$

$$= ٣ \times \frac{٤^{٣} - ١^{٣}}{٣} = ٣ \times \frac{٦٣}{٣} = ٦٣$$

خاصيّة (٢):

إذا كان ق(س)، هـ(س) اقترانين قابلين للتكامل على [أ ، ب] فإن الاقترانين : ق(س) + هـ(س)، ق(س) − هـ(س) يكونان قابلين للتكامل على [أ ، ب]، ويكون :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \left(\text{ق(س)} \mp \text{هـ(س)}\right) \text{ءس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) ءس} \mp \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ(س) ءس}$$

ويمكن تعميم هذه الخاصية لأكثر من اقترانين .

مثال (٢): أوجد قيمة $\int_{٠}^{٣} (س^٢ - ٢س)\, ءس$

الحل:

$$\int_{٠}^{٣} (س^٢ - ٢س)\, ءس = \int_{٠}^{٣} س^٢\, ءس - \int_{٠}^{٣} ٢س\, ءس$$

$$= \frac{٣^٣ - ٠^٣}{٣} - ٢ \times \frac{٣^٢ - ٠^٢}{٢}$$

$$= ٩ - ٩ = ٠$$

خاصيّة (٣) (خاصية الإضافة):

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل على فترة مغلقة، وكانت أ ، ب ، جـ ، أية ثلاثة أعداد تنتمي لتلك الفترة، فإن:

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\, ءس = \int_{أ}^{جـ} ق(س)\, ءس + \int_{جـ}^{ب} ق(س)\, ءس$$

مثال (٣): أوجد $\int_{٠}^{٥} |س - ٢|\, ءس$

الحل:

$$|س - ٢| = \begin{cases} ٢ - س & ، \quad ٠ \leq س \leq ٢ \\ س - ٢ & ، \quad ٢ \leq س \leq ٥ \end{cases}$$

$$\therefore \int_{٠}^{٥} |س - ٢|\, ءس = \int_{٠}^{٢} (٢ - س)\, ءس + \int_{٢}^{٥} (س - ٢)\, ءس$$

$$= ٢(٢ - ٠) - \frac{٢^٢ - ٠^٢}{٢} + \frac{٥^٢ - ٢^٢}{٢} - ٢(٥ - ٢)$$

$$= ٤ - ٢ + ١٠,٥ - ٦ = ٦,٥$$

مثال (٤): أكتب في صورة تكامل واحد: $\int_{١}^{٦} ق(س)\, ءس - \int_{٩}^{٦} ق(س)\, ءس$

الحل:

$$\int_{١}^{٦} ق(س)\, ءس - \int_{٩}^{٦} ق(س)\, ءس = \int_{١}^{٦} ق(س)\, ءس + \int_{٦}^{٩} ق(س)\, ءس$$

$$= \int_{١}^{٩} ق(س)\, ءس$$

خاصيّة (٤) (خاصية المقارنة):

إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للتكامل على [أ ، ب] ، وكان ق(س) ≤ هـ(س) لجميع قيم س ∈ [أ ، ب]، فإن:

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\ ءس \le \int_{أ}^{ب} هـ(س)\ ءس$$

نتيجة:

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل على [أ ، ب]، وكان ق(س) ≥ ٠ لجميع قيم س ∈ [أ ، ب]، فإن:

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\ ءس \ge ٠$$

مثال (٥): بين أن $\int_{-١}^{٦} (س^٢ + ٥)\ ءس \ge \int_{-١}^{٦} ٢س\ ءس$ ، دون حساب قيمة كلٍّ من التكاملين.

الحل:

يكفي لإثبات صحة المتباينة أن نبرهن أن الاقتران (س^٢ + ٥) ≥ الاقتران ٢س لجميع س ∈ [-١ ، ٦] ، أي أن المقدار س^٢ + ٥ - ٢س ≥ ٠ ، لجميع س ∈ [-١ ، ٦]

للبحث في إشارة المقدار التربيعي س^٢ + ٥ - ٢س ، نجد المميز ب^٢ - ٤ أ جـ

المميز = (-٢)^٢ - ٤ × ١ × ٥ = -١٦ ، وحيث إن المميز سالب فإشارة المقدار نفس إشارة معامل س^٢ لجميع قيم س ، أي أن المقدار موجب لجميع س ∈ ح

أي أن س^٢ + ٥ - ٢س ≥ ٠ لجميع س ∈ ح

∴ س^٢ + ٥ ≥ ٢س لجميع س ∈ [-١ ، ٦]

$$\Leftarrow \int_{-١}^{٦} (س^٢ + ٥)\ ءس \ge \int_{-١}^{٦} ٢س\ ءس$$

مثال (٦): بين أن $\int_{٠}^{\pi} (٣ + جا^٣س)\ ءس$ يقع بين القيمتين ٢π ، ٤π

الحل:

صفر ≥ جاس ≥ ١ لماذا؟ ∴ صفر ≥ جا^{٣}س ≥ ١

∴ ٣ ≥ ٣ + جا^{٣}س ≥ ٤

$$\therefore \int_{٠}^{\pi} ٣\ ءس \le \int_{٠}^{\pi} (٣ + جا^٣س)\ ءس \le \int_{٠}^{\pi} ٤\ ءس$$

$$\therefore ٣\pi \le \int_{٠}^{\pi} (٣ + جا^٣س)\ ءس \le ٤\pi$$

مثال (٧): عين إشارة التكامل $\int_{١}^{٤} \frac{٢\text{س} - ١}{\text{س}^{٢} + ١}\, \text{ءس}$

الحل: إشارة الاقتران ق(س) = $\frac{٢\text{س} - ١}{\text{س}^{٢} + ١}$ موجبة لجميع قيم س > $\frac{١}{٢}$. لاحظ الشكل (٤-٥)

$\therefore$ إشارة الاقتران $\frac{٢\text{س} - ١}{\text{س}^{٢} + ١}$ موجبة في الفترة [١ ، ٤]

$\therefore$ $\int_{١}^{٤} \frac{٢\text{س} - ١}{\text{س}^{٢} + ١}\, \text{ءس} > ٠$

إشارة البسط: $- - -$ • $+ + +$ عند $\frac{١}{٢}$

إشارة المقام: $+ + +$ $+$ $+ + +$ عند $\frac{١}{٢}$

إشارة ق(س): $- - -$ • $+ + +$ عند $\frac{١}{٢}$

الشكل (٤-٥)

تمارين (3-4)

١ إذا كان $\int_{١}^{٢} \text{ق(س)}\, \text{ءس} = -٤$ ، $\int_{١}^{٥} \text{ق(س)}\, \text{ءس} = ٦$ ، $\int_{١}^{٥} \text{هـ(س)}\, \text{ءس} = ٨$ فأوجد كلاً من :

أ) $\int_{١}^{٢} ٣\text{ق(س)}\, \text{ءس}$ ب) $\int_{٢}^{٥} \text{ق(س)}\, \text{ءس}$ جـ) $\int_{١}^{٥} \left(٤\text{ق(س)} - \text{هـ(س)}\right) \text{ءس}$

٢ أكتب في صورة تكامل واحد :

أ) $\int_{٦}^{٣} \text{ق(س)}\, \text{ءس} + \int_{-٢}^{٦} \text{ق(س)}\, \text{ءس}$ ب) $\int_{١}^{٧} \text{ق(س)}\, \text{ءس} - \int_{١}^{٣} \text{ق(س)}\, \text{ءس}$

٣ جد قيمة كلٍّ من :

أ) $\int_{-١}^{٢٠} \sqrt{٢}\, \text{ءس}$ ب) $\int_{١}^{٢} (٢\text{س} - ٥)\, \text{ءس}^{٢}$ جـ) $\int_{-٣}^{٠} |\text{س} - ٢|\, \text{ءس}$

٤ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} + ١ & ، \; ٠ \leq \text{س} < ١ \\ ٢ - \text{س} & ، \; ١ \leq \text{س} \leq ٢ \end{cases}$ فأوجد قيمة $\int_{٠}^{٢} \text{ق(س)}\, \text{ءس}$

٥ إذا كان $\int_{١}^{٣} \left(٤\text{ق(س)} + ٧\text{هـ(س)}\right) \text{ءس} = ١٩$ ، وكان $\int_{١}^{٣} ٣\text{ق(س)}\, \text{ءس} = ٩$ ، فما قيمة $\int_{١}^{٣} ٥\, \text{هـ(س)}\, \text{ءس}$؟

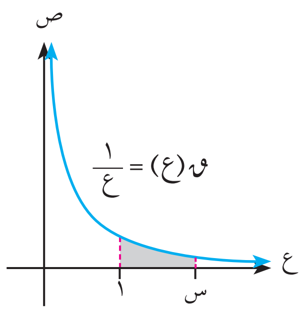
ق ق ق ق

4-4 الاقترانات اللوغاريتمية والأسّــــيّة الطبيعيـــة
(Natural Logarithmic and Exponential Functions)

أولاً: الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي:

تعلم أن $\int$ سⁿ ءس = $\frac{س^{ن+1}}{ن+1}$ + جـ ، ن ≠ -١ ، فماذا عن الحالة التي تكون فيها ن=-١ ، أي $\int \frac{1}{س}$ ءس؟

للإجابة عن السؤال نلاحظ أن الاقتران ق(س) = $\frac{1}{س}$ ، س > ٠ اقتران متصل على أية فترة مغلقة من مجاله ؛ ومن ثم فإن الاقتران ل(س) = $\int_{1}^{س} \frac{1}{ع}$ ءع ، س > ٠ هو اقتران بدائي له ، وقيمة هذا الاقتران عند أي قيمة للمتغير س ≥ ١ تمثله مساحة المنطقة المظللة في الشكل (٤-٦) .



الشكل (٤-٦)

من خصائص الاقتران ل(س) = $\int_{1}^{س} \frac{1}{ع}$ ءع ، س > ٠ ما يلي :

١ ل(١) = صفر

٢ لَ(س) = $\frac{1}{س}$ (النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل)

∴ لَ(س) > ٠ لجميع س > ٠

أي أن ل(س) اقتران متزايد على مجاله وهو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة .

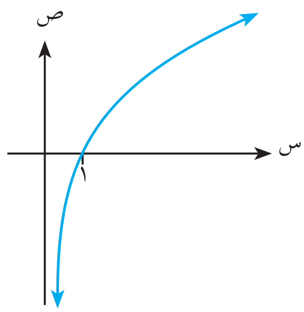
٣ لً(س) = $\frac{-1}{س^2}$

∴ لً(س) < ٠ لجميع س > ٠

أي أن منحنى الاقتران ل(س) مقعر للأسفل على مجاله .

بالاستعانة بهذه الخصائص ، يمكن رسم منحنى ل(س) بشكل تقريبي كما في الشكل (٤-٧)، وهذا الشكل ؛ يذكرك بمنحنى الاقتران اللوغاريتمي الذي مر معك سابقاً .

ويمكن تبيان أن الاقتران ل(س) ينتمي فعلاً لعائلة الاقترانات اللوغاريتمية ، وأن الأساس لهذا الاقتران هو العدد النيبيري (هـ) الذي تعرفته سابقاً وقيمته ٢,٧ تقريباً .



الشكل (٤-٧)

تعريف:

اقتران اللوغاريتم الطبيعي ق(س) = لوهـ س هو اقتران مجاله مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة، ومداه مجموعة الأعداد الحقيقية، وقاعدته لوهـ س = $\int_{1}^{س} \frac{1}{ع}$ ءع ، س > ٠

وبطبيعة الحال، تنطبق على الاقتران اللوغاريتمي ق(س) = لوهـ س قوانين اللوغاريتمات ذاتها التي تعلمتها سابقاً، أي أن:

١ لوهـ أب = لوهـ أ + لوهـ ب

٢ لوهـ $\frac{أ}{ب}$ = لوهـ أ − لوهـ ب

٣ لوهـ أ^{ن} = ن لوهـ أ

نظرية:

١ إذا كان ق(س) = لوهـ س ، س > ٠ فإن قَ(س) = $\frac{١}{س}$

٢ $\int \frac{١}{س}$ ءس = لوهـ |س| + جـ

وبوجه عام:

١ إذا كان ق(س) = لوهـ ع(س)؛ حيث ع(س) > ٠ ، وقابل للاشتقاق، فإن:

قَ(س) = $\frac{١}{ع(س)}$ × عَ(س) = $\frac{عَ(س)}{ع(س)}$

٢ $\int \frac{قَ(س)}{ق(س)}$ ءس = لوهـ |ق(س)| + جـ

مثال (١): أوجد $\int \frac{٥}{س}$ ءس

الحل: $\int \frac{٥}{س}$ ءس = ٥ $\int \frac{١}{س}$ ءس

= ٥ لوهـ |س| + جـ

مثال (٢): أوجد $\int_{هـ}^{هـ^٢} \frac{١}{س}$ ءس

الحل:

$$\int_{هـ}^{هـ^٢} \frac{١}{س} ءس = لو_{هـ} |س| \Big|_{هـ}^{هـ^٢}$$

$$= لو_{هـ} س \Big|_{هـ}^{هـ^٢}$$

$$= لو_{هـ} هـ^٢ - لو_{هـ} هـ$$

$$= ٢لو_{هـ} هـ - لو_{هـ} هـ = لو_{هـ} هـ = ١$$

مثال (٣): إذا كانت ص = لو$_{هـ}$ جتا^{٢}س فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$

الحل:

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{جتا^٢ س} \times (جتا^٢ س)'$$

$$= \frac{١}{جتا^٢ س} \times ٢جتا س \times -جا س = -٢ظا س$$

مثال (٤): أوجد $\int \frac{٢س}{س^٢ + ١}$ ءس

الحل: البسط (٢س) هو مشتقة المقام (س^٢ + ١)

$$\therefore \int \frac{٢س}{س^٢ + ١} ءس = لو_{هـ} (س^٢ + ١) + جـ$$

مثال (٥): أوجد $\int$ ظتا س ءس

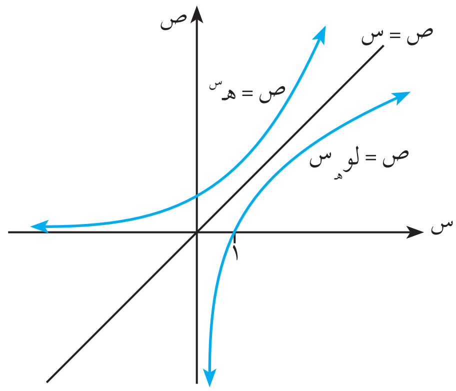
الحل:

$$\int ظتا س ءس = \int \frac{جتا س}{جا س} ءس = \int \frac{(جا س)'}{جا س} ءس$$

$$= لو_{هـ} |جا س| + جـ$$

ثانياً: الاقتران الأُسّيّ الطبيعي:

الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي ق(س) = $\text{لو}_{\text{هـ}}$ س هو اقتران تناظر؛ فيكون له اقتران عكسي ق$^{-1}$(س) مجاله ح، ومداه ح$^{+}$، وقاعدته ق$^{-1}$(س) = هـ$^{\text{س}}$، ومنحناه هو انعكاس لمنحنى الاقتران اللوغاريتمي في المستقيم ص = س. انظر الشكل (٤-٨).



الشكل (٤-٨)

نسمي الاقتران ص = هـ$^{\text{س}}$ الاقتران الأسي الطبيعي، وتنطبق عليه قوانين الأسس التي تعلمتها سابقاً، ومنها:

١ هـ$^{\text{م}}$ × هـ$^{\text{ن}}$ = هـ$^{\text{م+ن}}$

٢ هـ$^{\text{م}}$ ÷ هـ$^{\text{ن}}$ = هـ$^{\text{م-ن}}$

٣ (هـ$^{\text{م}}$)$^{\text{ن}}$ = هـ$^{\text{م ن}}$

٤ هـ^{٠} = ١

نظرية:

١ إذا كانت ص = هـ$^{\text{س}}$ فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = هـ$^{\text{س}}$

٢ $\int$ هـ$^{\text{س}}$ دس = هـ$^{\text{س}}$ + جـ

البرهان:

١ ص = هـ$^{\text{س}}$

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين، ينتج:

$\text{لو}_{\text{هـ}}$ ص = $\text{لو}_{\text{هـ}}$ هـ$^{\text{س}}$ = س $\text{لو}_{\text{هـ}}$ هـ = س

وباشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى س، ينتج:

$\frac{١}{\text{ص}}$ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ١

$\therefore$ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ص = هـ$^{\text{س}}$

٢ بما أن $\frac{\text{د}}{\text{دس}}$ (هـ$^{\text{س}}$) = هـ$^{\text{س}}$

$\therefore$ هـ$^{\text{س}}$ اقتران بدائي للاقتران هـ$^{\text{س}}$

أي أن $\int$ هـ$^{\text{س}}$ دس = هـ$^{\text{س}}$ + جـ

ويمكن تعميم النظرية السابقة كما يلي:

١ إذا كانت ص = $هـ^{ك(س)}$ ، ك(س) قابل للاشتقاق فإن $\frac{ءص}{ءس} = هـ^{ك(س)} \times كَ(س)$

٢ $\int هـ^{ك(س)} . كَ(س)\, ءس = هـ^{ك(س)} + جـ$

مثال (٦): أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ في كل مما يلي:

أ ص = س $هـ^{س}$ ب ص = $هـ^{جاس}$ عند س = $\frac{\pi}{٢}$ جـ ص = $لو_{هـ} \frac{هـ^{س}}{هـ^{س} + ١}$

الحل:

أ ص = س $هـ^{س}$

$\frac{ءص}{ءس} = س \times هـ^{س} + هـ^{س} \times ١ = س هـ^{س} + هـ^{س}$

ب ص = $هـ^{جاس}$ ، س = $\frac{\pi}{٢}$

$\frac{ءص}{ءس} = هـ^{جاس} \times جتاس$

$\therefore \left.\frac{ءص}{ءس}\right|_{س = \frac{\pi}{٢}} = هـ^{جا\frac{\pi}{٢}} \times جتا \frac{\pi}{٢} = هـ^{١} \times ٠ = ٠$

جـ ص = $لو_{هـ} \frac{هـ^{س}}{هـ^{س} + ١}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{\left(\frac{هـ^{س}}{هـ^{س} + ١}\right)} \times \left(\frac{هـ^{س}}{هـ^{س} + ١}\right)'$

$= \frac{هـ^{س} + ١}{هـ^{س}} \times \frac{(هـ^{س} + ١) \times هـ^{س} - هـ^{س} (هـ^{س})}{(هـ^{س} + ١)^{٢}}$

$= \frac{هـ^{س} + ١}{هـ^{س}} \times \frac{هـ^{٢س} + هـ^{س} - هـ^{٢س}}{(هـ^{س} + ١)^{٢}} = \frac{١}{هـ^{س} + ١}$

ويمكن حل السؤال بطريقة أخرى هكذا:

ص = $لو_{هـ} \frac{هـ^{س}}{هـ^{س} + ١}$

$= لو_{هـ} هـ^{س} - لو_{هـ} (هـ^{س} + ١)$

$= س - لو_{هـ} (هـ^{س} + ١)$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = ١ - \frac{١}{هـ^{س} + ١} \times هـ^{س} = \frac{هـ^{س} + ١ - هـ^{س}}{هـ^{س} + ١} = \frac{١}{هـ^{س} + ١}$

مثال (٧): أوجد كلاً من التكاملات الآتية :

أ $\int ٣س^{٢} هـ^{س^{٣}} \, ءس$ ب $\int هـ^{جاس} جتاس \, ءس$

الحل:

أ $\int ٣س^{٢} هـ^{س^{٣}} \, ءس = \int هـ^{س^{٣}} \times (س^{٣})' \, ءس$

$= هـ^{س^{٣}} + جـ$

ب $\int هـ^{جاس} جتاس \, ءس = \int هـ^{جاس} (جاس)' \, ءس$

$= هـ^{جاس} + جـ$

تمارين (4-4)

١ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ في كلٍ مما يلي :

أ $ص = لو_{هـ}(س^{٢} + ٢س)$ ب $ص = (لو_{هـ} س)^{٣}$

جـ $ص = لو_{هـ} جا^{٢}س$ د $ص = س - س لو_{هـ} س$

هـ $ص = \frac{س لو_{هـ} س}{١ + لو_{هـ} س}$ و $ص = لو_{هـ}(لو_{هـ} س)$

ز $ص = \frac{هـ^{س} + ١}{هـ^{س} - ١}$ ح $ص = هـ^{س^{٢}} لو_{هـ} س^{٣}$

ط $ص = لو_{هـ} \sqrt{\frac{س}{(س^{٢} + ١)^{٣}}}$ ي $هـ^{س} + هـ^{ص} = هـ^{س+ص}$

ك $ص = \sqrt{\frac{س}{(س^{٢} + ١)^{٣}}}$ ل $ص = س^{س}$

(إرشاد : خذ لوغاريتم الطرفين في الفرعين ك ، ل)

٢ أوجد كلاً من التكاملات التالية :

أ $\int هـ^{ظاس} قا^{٢}س \, ءس$ ب $\int \frac{هـ^{٢س}}{هـ^{٢س} + ١} \, ءس$

جـ $\int \frac{١}{٢} \sqrt{هـ^{س}} \, ءس$ د $\int_{هـ} ٢هـ^{٢س} \, ءس$

هـ $\int \frac{س + ١}{س^{٢} + ٢س + ٤} \, ءس$ و $\int \frac{س}{س + ١} \, ءس$ (إرشاد : ضع س=(س+١)−١ في البسط)

٣ بين أن الاقتران $ص = (١ + ٢س)هـ^{٣س}$ يحقق المعادلة :

$$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} - ٦ \frac{ءص}{ءس} + ٩ص = ٠$$

5-4 طـرق التكامـل (Methods of Integration)

عندما يطلب منك إجراء تكامل ما، قد يكون بالإمكان التطبيق المباشر لإحدى القواعد الأساسية في التكامل التي مرت معك سابقاً مثل :

$\int$ س^{ن} ءس = $\frac{\text{س}^{ن+١}}{ن+١}$ + جـ ، ن ≠ −١ ، أو $\int$ قا^{٢}س ءس = ظا س + جـ، أو $\int \frac{١}{\text{س}}$ ءس = لو |س| + جـ ،

أو . . . إلخ .

أما في الحالات التي لا تخضع للتطبيق المباشر لقواعد التكامل الأساسية فمن الممكن استخدام طرق أخرى منها :

١ التكامل بالتعويض .

٢ التكامل بالأجزاء .

٣ التكامل بالكسور الجزئية .

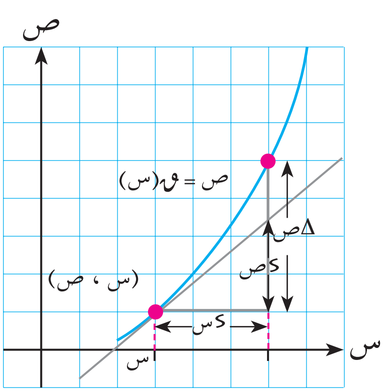
وفيما يلي توضيح لكلٍّ من هذه الطرق :

أولاً: التكامل بالتعويض (Integration by Substitution)

تمهيد: الرمزان ءس ، ءص:

إذا كان ص = ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند النقطة (س ، ص) فإننا نعرف الرمزين ءس ، ءص، ويسميان تفاضلة س، وتفاضلة ص على الترتيب، هكذا: ءس = Δس، ءص = ق$'$(س) ءس .

إن الرمز ءس هو رمز آخر للتغير في س أي Δس، أما الرمز ءص فهو التغير في ص المناظر للتغير في س بالنسبة إلى المماس للمنحنى عند النقطة (س ، ص)، وعندما تكون Δس قريبة من الصفر فإن Δص تكون قريبة من ءص، انظر الشكل (٤-٩).



الشكل (٤-٩)

ويتيح لنا هذا التعريف اعتبار $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ كسراً بسطه ومقامه ءص، ءس على الترتيب .

إن أسلوب التكامل بالتعويض يقوم على تحويل التكامل المعطى إلى تكامل آخر بمتغير جديد بصورة أسهل من الصورة الأصلية ؛ فمثلاً إذا كان التكامل المطلوب على الصورة $\int$ ق(هـ(س)) . هـ$'$(س) ءس فإن التعويض ص = هـ(س) يحول التكامل إلى الصورة $\int$ ق(ص) ءص لأن ءص = هـ$'$(س) ءس ؛ والصورة الأخيرة أسهل من الصورة الأولى .

مثال (١): أوجد $\int$ (٢س + ٣)^{٥} ءس

الحل:

نفرض أن ص = ٢س + ٣

∴ ءص = ٢ ءس ومنها ءس = $\frac{ءص}{٢}$

بالتعويض يكون التكامل = $\int$ ص^{٥} $\frac{ءص}{٢}$ = $\frac{ص^{٦}}{١٢}$ + جـ

= $\frac{(٢س + ٣)^{٦}}{١٢}$ + جـ

مثال (٢): أوجد $\int$ (س^{٢} + ٣س)^{٣} (٢س + ٣) ءس

الحل:

نفرض أن ص = س^{٢} + ٣س

∴ ءص = (٢س + ٣) ءس

وبالتعويض يكون التكامل = $\int$ ص^{٣} ءص = $\frac{ص^{٤}}{٤}$ + جـ

= $\frac{(س^{٢} + ٣س)^{٤}}{٤}$ + جـ

مثال (٣): أوجد $\int$ جتا(٣س + ٢) ءس

الحل:

نفرض أن ص = (٣س + ٢)

∴ ءص = ٣ ءس ومنها ءس = $\frac{ءص}{٣}$

وبالتعويض يكون التكامل = $\int$ $\frac{١}{٣}$ جتاص ءص = $\frac{١}{٣}$ جاص + جـ

= $\frac{١}{٣}$ جا(٣س + ٢) + جـ

مثال (٤): أوجد $\int$ جا^{٢}س جتاس ءس

الحل:

نفرض أن ص = جاس

∴ ءص = جتاس ءس

وبالتعويض يكون التكامل = $\int$ ص^{٢} ءص = $\frac{ص^{٣}}{٣}$ + جـ

= $\frac{جا^{٣}س}{٣}$ + جـ

قاعدة:

إذا كان $\int$ ق(س) ءس = م(س) + جـ ، فإن $\int$ ق(أس + ب) ءس = $\frac{\text{م(أس + ب)}}{\text{أ}}$ + جـ

مثال (٥):

أوجد كلاً من التكاملات التالية :

أ $\int$ (٣س + ٤)^{٥} ءس   ب $\int$ قا^{٢}(٥س + ١) ءس   جـ $\int$ هـ$^{٥س+٧}$ ءس

الحل:

أ $\int$ س^{٥} ءس = $\frac{\text{س}^{٦}}{٦}$ + جـ

∴ $\int$ (٣س + ٤)^{٥} ءس = $\frac{(\text{٣س + ٤})^{٦}}{٦ \times ٣}$ + جـ

= $\frac{(\text{٣س + ٤})^{٦}}{١٨}$ + جـ

ب $\int$ قا^{٢}س ءس = ظاس + جـ

∴ $\int$ قا^{٢}(٥س + ١) ءس = $\frac{\text{ظا(٥س + ١)}}{٥}$ + جـ

جـ $\int$ هـ^{س} ءس = هـ^{س} + جـ

∴ $\int$ هـ$^{٥س+٧}$ ءس = $\frac{\text{هـ}^{٥س+٧}}{٥}$ + جـ

مثال (٦):

أوجد $\int_{0}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{٢جاس جتاس}}{\sqrt{\text{١ + جا}^{٢}\text{س}}}$ ءس

الحل:

نفرض أن ص = ١ + جا^{٢}س

ءص = ٢جاس جتاس ءس

بالتعويض يكون التكامل غير المحدود= $\int \frac{\text{ءص}}{\sqrt{\text{ص}}}$

= $\int$ ص$^{-\frac{١}{٢}}$ ءص

= ٢ ص$^{\frac{١}{٢}}$ + جـ = ٢ $\sqrt{\text{١ + جا}^{٢}\text{س}}$ + جـ

∴ التكامل المحدود المطلوب = ٢ $\sqrt{\text{١ + جا}^{٢}\text{س}}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{٢}}$ = ٢ $\sqrt{٢}$ − ٢

ملاحظة: يمكن حساب التكامل المحدود أيضاً بالاستمرار في التكامل مع المتغير الجديد ص فعندما س = ٠ تكون ص = ١ + جا^{٢} ٠ = ١ ، وعندما س = $\frac{\pi}{٢}$ تكون ص = ١ + جا^{٢} $\frac{\pi}{٢}$ = ٢

∴ التكامل المحدود = $٢ص^{\frac{١}{٢}} \Big|_{١}^{٢}$ = ٢ $\sqrt{٢}$ − ٢

مثال (٧): أوجد $\int_{١}^{هـ} \frac{\text{جتا}(\text{لو}_{هـ}\text{س})}{\text{س}}$ ءس

الحل:

نفرض أن ص = لو$_{هـ}$س

∴ ءص = $\frac{١}{\text{س}}$ءس ومنها ءس = س ءص

وعندما س = ١ تكون ص = لو$_{هـ}$ ١ = ٠ ، وعندما س = هـ تكون ص = لو$_{هـ}$ هـ = ١

∴ بالتعويض ، يكون التكامل = $\int_{٠}^{١} \frac{\text{جتاص}}{\text{س}}$ × س ءص

= $\int_{٠}^{١}$ جتاص ءص

= جاص $\Big|_{٠}^{١}$

= جا ١ − جا ٠ = جا ١

مثال (٨): أوجد $\int$ جتا^{٣}س ءس

الحل:

$\int$ جتا^{٣}س ءس = $\int$ جتاس . جتا^{٢}س ءس

= $\int$ جتاس(١ − جا^{٢}س) ءس

وبفرض أن ص = جاس يكون ءص = جتاس ءس

∴ $\int$ جتا^{٣}س ءس = $\int$ (١ − ص^{٢}) ءص

= ص − $\frac{\text{ص}^{٣}}{٣}$ + جـ

= جاس − $\frac{\text{جا}^{٣}\text{س}}{٣}$ + جـ (تحقق من صحة الحل)

تمارين (1-5-4)

١ أوجد كلاً من التكاملات التالية:

أ) $\int \text{س}(\text{س}^{٢} + ٤)^{٥}\,\text{ءس}$

ب) $\int (\text{س}^{٢} - ١)\sqrt{\text{س}^{٣} - ٣\text{س}}\,\text{ءس}$

ج) $\int \text{جتاس}\sqrt{١ + \text{جاس}}\,\text{ءس}$

د) $\int \text{س}^{-٢}\,\text{جا}\,\frac{١}{\text{س}}\,\text{ءس}$

هـ) $\int (\text{س} + ٢)\,\text{جا}\,(\text{س}^{٢} + ٤\text{س} - ٦)\,\text{ءس}$

و) $\int \frac{(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س})^{٢}}{\text{س}}\,\text{ءس}$

ز) $\int_{٠}^{٢} \frac{\text{س}^{٢} + ١}{\sqrt{\text{س}^{٣} + ٣\text{س} + ١}}\,\text{ءس}$

ح) $\int_{٣}^{٨} \frac{\text{جا}\sqrt{\text{س} + ١}}{\sqrt{\text{س} + ١}}\,\text{ءس}$

ط) $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{هـ}^{\text{س}} + ١)^{٢}}\,\text{ءس}$

ي) $\int \frac{\text{هـ}^{\sqrt{٢\text{س}+٥}}}{\sqrt{٢\text{س} + ٥}}\,\text{ءس}$

٢ أوجد كلاً من التكاملات التالية:

أ) $\int \sqrt[٣]{٢\text{س} - ١}\,\text{ءس}$

ب) $\int \text{جا}^{٢}\text{س}\,\text{ءس}$

ج) $\int \text{جا}^{٢}\text{س}\,\text{جتا}^{٣}\text{س}\,\text{ءس}$

د) $\int \frac{١}{١ - \text{جتاس}}\,\text{ءس}$

هـ) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}} \text{قا}^{٣}\text{س}\,\text{ظاس}\,\text{ءس}$

و) $\int \text{س}^{٢}(\text{س} + ١)^{١٥}\,\text{ءس}$

ز) $\int \text{قاس}\,\text{ءس}$ (إرشاد: اضرب واقسم على (قاس + ظاس))

ح) $\int \frac{\text{س}}{\sqrt{١ + \text{س}}}\,\text{ءس}$ (إرشاد: ضع ص = ١ + س)

ثانياً: التكامل بالأجزاء (Integration by Parts)

نعلم أنه إذا كان ق ، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س فإن :

$$\frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{ق} \times \text{هـ}) = \text{ق} \times \frac{\text{دهـ}}{\text{دس}} + \text{هـ} \times \frac{\text{دق}}{\text{دس}}$$

وبإجراء التكامل للطرفين بالنسبة إلى س يكون :

$$\text{ق} \times \text{هـ} = \int \text{ق} \, \frac{\text{دهـ}}{\text{دس}} \, \text{دس} + \int \text{هـ} \, \frac{\text{دق}}{\text{دس}} \, \text{دس}$$

$$= \int \text{ق دهـ} + \int \text{هـ دق}$$

أي أن :

$$\int \text{ق دهـ} = \text{ق} \times \text{هـ} - \int \text{هـ دق}$$

تسمى هذه القاعدة قاعدة التكامل بالأجزاء، ويمكن استخدامها في حساب بعض التكاملات، كما يتضح من الأمثلة التالية :

مثال (١): أوجد $\int \text{س جاس دس}$

الحل:

نفرض أن $\text{ق} = \text{س}$ ، $\text{دهـ} = \text{جاس دس}$

$\text{دق} = \text{دس}$ ، $\text{هـ} = \int \text{جاس دس} = -\text{جتاس}$

لكن $\int \text{ق دهـ} = \text{ق هـ} - \int \text{هـ دق}$

$$\therefore \int \text{س جاس دس} = -\text{س جتاس} + \int \text{جتاس دس}$$

$$= -\text{س جتاس} + \text{جاس} + \text{جـ}$$

مثال (٢): أوجد $\int \text{س}\sqrt{\text{س} + ٤}\ \text{دس}$

الحل:

نفرض أن $\text{ق} = \text{س}$ ، $\text{دهـ} = \sqrt{\text{س} + ٤}\ \text{دس}$

$\text{دق} = \text{دس}$ ، $\text{هـ} = \int (\text{س} + ٤)^{\frac{١}{٢}}\ \text{دس} = \frac{٢}{٣}(\text{س} + ٤)^{\frac{٣}{٢}}$

$$\therefore \int \text{س}\sqrt{\text{س} + ٤}\ \text{دس} = \frac{٢}{٣}\text{س}(\text{س} + ٤)^{\frac{٣}{٢}} - \int \frac{٢}{٣}(\text{س} + ٤)^{\frac{٣}{٢}}\ \text{دس}$$

$$= \frac{٢}{٣}\text{س}(\text{س} + ٤)^{\frac{٣}{٢}} - \frac{٤}{١٥} \times (\text{س} + ٤)^{\frac{٥}{٢}} + \text{جـ}$$

يمكن أن يتطلب إجراء التكامل تطبيق طريقة الأجزاء أكثر من مرة، كما في المثال التالي :

مثال (٣): أوجد $\int$ س^٢ جتاس ءس

الحل: نفرض أن ى = س^٢ ، ءهـ = جتاس ءس

ءى = ٢س ءس ، هـ = $\int$ جتاس ءس = جاس

∴ $\int$ س^٢ جتاس ءس = س^٢ جاس − $\int$ ٢س جاس ءس

= س^٢ جاس − ٢ $\int$ س جاس ءس

ولحساب $\int$ س جاس ءس نستخدم التكامل بالأجزاء مرة أخرى، كما في مثال (١) فنحصل على النتيجة النهائية :

$\int$ س^٢ جتاس ءس = س^٢ جاس − ٢ (−س جتاس + جاس) + جـ

= س^٢ جاس + ٢س جتاس − ٢جاس + جـ

مثال (٤): أوجد $\int_{١}^{هـ}$ لوهـ س ءس

الحل: نفرض أن ى = لوهـ س ، ءو = ءس

ءى = $\frac{١}{س}$ ءس ، و = س

∴ $\int$ لوهـ س ءس = س لوهـ س − $\int$ س × $\frac{١}{س}$ ءس

= س لوهـ س − س + جـ

∴ $\int_{١}^{هـ}$ لوهـ س ءس = س لوهـ س − س $\Big|_{١}^{هـ}$

= (هـ لوهـ هـ − هـ) − (لوهـ ١ − ١) = ١

ويمكن حساب التكامل في بعض الحالات بتطبيق طريقتي التعويض والأجزاء معا، كما في المثال التالي :

مثال (٥): أوجد $\int \text{جا}\sqrt{\text{س}}\ \text{ءس}$

الحل: نفرض أن $\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$ ∴ $\text{س} = \text{ص}^{٢}$

∴ $\text{ءس} = ٢\text{ص}\ \text{ءص}$

بالتعويض، يكون $\int \text{جا}\sqrt{\text{س}}\ \text{ءس} = \int ٢\text{ص جا ص}\ \text{ءص}$

$= ٢\int \text{ص جا ص}\ \text{ءص}$

ولحساب $\int \text{ص جا ص}\ \text{ءص}$ نستخدم طريقة الأجزاء، كما في مثال (١) فنحصل على النتيجة النهائية:

$$\int \text{جا}\sqrt{\text{س}}\ \text{ءس} = ٢\int \text{ص جا ص}\ \text{ءص}$$

$$= ٢(-\text{ص جتا ص} + \text{جا ص}) + \text{جـ}$$

$$= ٢\left(-\sqrt{\text{س}}\ \text{جتا}\sqrt{\text{س}} + \text{جا}\sqrt{\text{س}}\right) + \text{جـ}$$

تمارين (2-5-4)

١ استخدم طريقة التكامل بالأجزاء في كلٍ مما يلي:

Ⓐ $\int \text{س جا}٢\text{س}\ \text{ءس}$ Ⓑ $\int_{٠}^{\pi} (٢\text{س} + ١)\text{جتا}٣\text{س}\ \text{ءس}$

Ⓒ $\int \text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س}\ \text{ءس}$ Ⓓ $\int \text{س}^{٢}\text{هـ}^{\text{س}}\ \text{ءس}$

Ⓔ $\int \text{س}^{١٠}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\ \text{ءس}$ Ⓕ $\int \text{هـ}^{\text{س}}\text{جا س}\ \text{ءس}$

(أ) $\int \text{س جا}٢\text{س}\ \text{ءس}$

(ب) $\int_{٠}^{\pi} (٢\text{س} + ١)\text{جتا}٣\text{س}\ \text{ءس}$

(جـ) $\int \text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س}\ \text{ءس}$

(د) $\int \text{س}^{٢}\text{هـ}^{\text{س}}\ \text{ءس}$

(هـ) $\int \text{س}^{١٠}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\ \text{ءس}$

(و) $\int \text{هـ}^{\text{س}}\text{جا س}\ \text{ءس}$

٢ أوجد التكاملات التالية:

(أ) $\int \text{س ظتا س قتا}^{٢}\text{س}\ \text{ءس}$

(ب) $\int \text{جا}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})\ \text{ءس}$

(جـ) $\int_{٠}^{١} \text{س}\sqrt{١ - \text{س}}\ \text{ءس}$

٣ إذا كان $\int_{١}^{٢} \text{ق}(\text{س})\ \text{ءس} = ٣$ ، $\text{ق}(١) = ٥$ ، $\text{ق}(٢) = ٨$ ، فاحسب قيمة $\int_{١}^{٢} \text{س ق}'(\text{س})\ \text{ءس}$

٤ إذا كانت $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{س قاس ظاس}$ ، فأوجد ص بدلالة س.